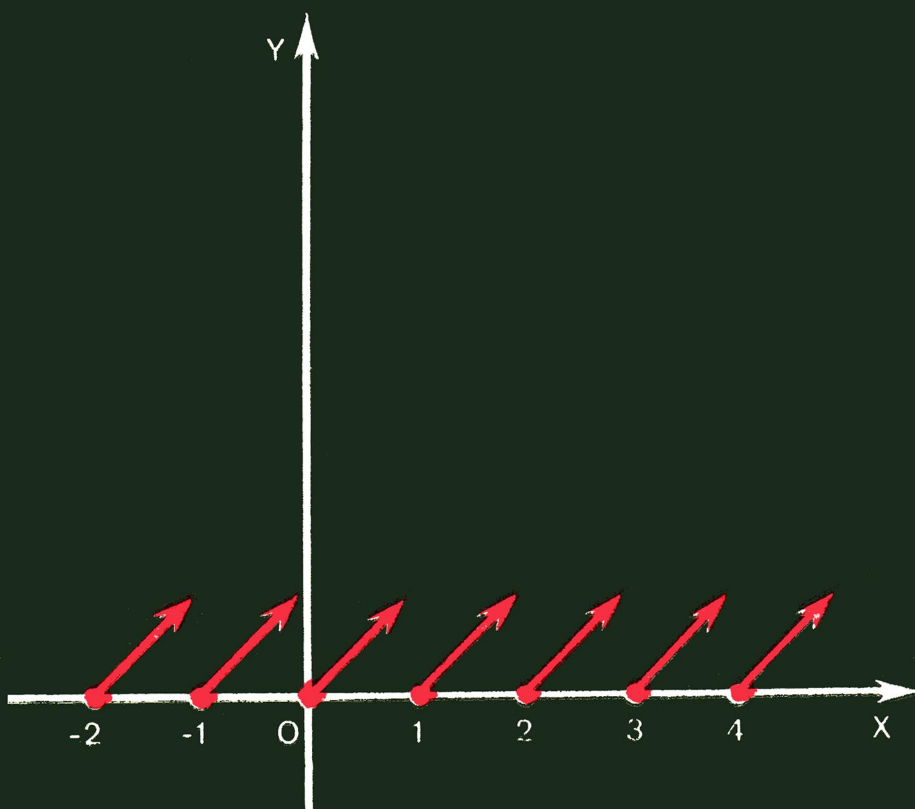
MATEMATIKA TECHNIKUMAMS

algebra ir analizės pradmenys

1 DALIS



MATEMATIKA TECHNIKUMAMS

algebra ir analizės pradmenys
1 DALIS

TSRS aukštojo ir specialiojo vidurinio mokslo ministerijos patvirtintas vadovėlis specialiosioms vidurinėms mokykloms



VILNIUS
„MOKSLAS“
1979

УДК 512.8

Autorių kolektyvas:
M. Kačenovskis, J. Koliaginas, G. Lukankinas, G. Jakovlevas
Rusiško leidimo redaktorius *G. Jakovlevas*

Vertė *E. Misevičius*

1702000000
A $\frac{20203-077}{M854(08)-79}$ 131—79

TURINYS

PRATARMĖ

Šis algebros ir analizės pradmenų vadovėlis yra parašytas pagal naują specialiųjų vidurinių mokyklų matematikos programą.

Pirmoje dalyje išdėstyta sekų ir funkcijų ribų teorija, svarbiausios tolydžiųjų funkcijų savybės, elementariųjų funkcijų savybės, pagrindinės diferencialinio skaičiavimo sąvokos ir metodai, taip pat jų taikymas geometrijoje ir fizikoje. Be to, vadovėlio pradžioje išdėstyti apytikslio skaičiavimo teorijos elementai ir paprasčiausios aibių teorijos bei matematinės logikos sąvokos, o paskutiniame skyriuje – trigonometrinių funkcijų teorija.

Knyga suderinta su dabartinėmis vidurinių mokyklų matematikos programomis ir vadovėliais.

Autoriai nuoširdžiai dėkoja TSRS Pedagogikos mokslų akademijos nariui korespondentui prof. J. Brovikovui ir TSRS aukštojo ir specialiojo vidurinio mokslo ministerijos metodistui P. Samoilenkai, atidžiai perskaičiusiems rankraštį ir pateikusiems vertingų pastabų. Taip pat autoriai dėkoja M. Rasudovskai už pateiktą medžiagą, kuria remiantis parašytas pirmasis skyrius.

Autoriai

I SKYRIUS

Skaičiavimo matematika

§ 1. ARTINIAI IR JŲ PAKLAIDOS

1. Dydžio artinys. Absoliutinė artinio paklaida. Absoliutinės paklaidos rėžis. Praktinėje veikloje žmonėms tenka matuoti įvairius dydžius, nustatyti medžiagų kiekį ir įvertinti darbo produktus, atlikinėti įvairius skaičiavimus. Tų matavimų ir skaičiavimų rezultatai yra skaičiai. Matuojant gauti skaičiai būna apytiksliai, tik tam tikru tikslumu apibūdina ieškomuosius dydžius. Matuoti visai tiksliai neįmanoma, nes matavimo prietaisai nėra tikslūs, mūsų regėjimo organai netobuli, o kartais ir dėl pačių tiriamųjų objektų savybių negalima jų išmatuoti bet kokiu tikslumu.

Pavyzdžiui, žinoma, kad Sueco kanalo ilgis yra 160 km, atstumas geležinkeliu tarp Maskvos ir Leningrado – 651 km. Čia matavimų rezultatai yra vieno kilometro tikslumo. Jeigu stačiakampio sklypo ilgis yra 29 m, o plotis – 12 m, tai matuota vieno metro tikslumu, nekreipiant dėmesio į metro dalis.

Prieš ką nors matuodami, turime nuspręsti, kokiu tikslumu matuosime, t.y. į kurias matavimo vieneto dalis atsižvelgsime ir kurių galime nepaisyti.

Jeigu kokio nors dydžio a tiksli reikšmė nežinoma, bet žinoma apytikslė jo reikšmė, arba artinys x, tai rašoma $a \approx x$.

Išmatavę tą patį dydį kelis kartus, gausime skirtingus artinius. Kiekvienas artinys skirsis nuo tikslios matuojamojo dydžio reikšmės, sakykime a, tam tikru dydžiu, kurį vadinsime *paklaida*.

Apibrėžimas. Jeigu skaičius a yra tiksli dydžio reikšmė, o skaičius x – jo artinys (apytikslė reikšmė), tai skaičių a ir x skirtumo modulis vadinamas to artinio *absoliutine paklaida* ir žymimas $\Delta_a x$, arba Δ_a.

Vadinasi, remiantis apibrėžimu,

$$\Delta_a x = |a - x|. \tag{1}$$

Iš to apibrėžimo išplaukia, kad

$$a = x \pm \Delta_a x. \tag{2}$$

Jeigu žinoma, koks dydis turimas omenyje, tai žymėjime $\Delta_a x$ indeksas a praleidžiamas ir (2) lygybė užrašoma šitaip:

$$a = x \pm \Delta x. \tag{3}$$

1 pavyzdys. Sakykime, sudarę pastato sąmatą, gavome 112 405 rb 27 kp sumą. Norėdami tą sumą suapvalinti, atmetame kapeikas; taip gauto artinio absoliutinė paklaida

$$\Delta x = 112\,405 \text{ rb } 27 \text{ kp} - 112\,405 \text{ rb} = 27 \text{ kp} = 0{,}27 \text{ rb}.$$

2 pavyzdys. Žinome, kad $1/3 = 0{,}333...$ Artinio 0,333 absoliutinė paklaida

$$\Delta x = \left| \frac{1}{3} - 0{,}333 \right| = \left| \frac{1000}{3000} - \frac{999}{3000} \right| = \frac{1}{3000}.$$

Dažniausiai tiksli ieškomojo dydžio reikšmė būna nežinoma, todėl negalima rasti ir to dydžio artinio absoliutinės paklaidos. Tačiau kiekvienu konkrečiu atveju galima nurodyti teigiamą skaičių, už kurį ta absoliutinė paklaida negali būti didesnė. Tas skaičius vadinamas dydžio a artinio absoliutinės paklaidos rėžiu ir žymimas h_a.

Vadinasi, jeigu x yra bet kuris dydžio a artinys, gautas tam tikru būdu, tai

$$\Delta_a x = |a - x| \leqslant h_a. \tag{4}$$

Iš ankstesniųjų samprotavimų išplaukia štai kas: jei h_a yra dydžio a artinio absoliutinės paklaidos rėžis, tai ir bet kuris didesnis kaip h_a skaičius tai pat yra to dydžio artinio absoliutinės paklaidos rėžis. Paprastai praktikoje absoliutinės paklaidos rėžiu imamas mažiausias skaičius, tenkinantis (4) nelygybę.

Išsprendę nelygybę $|a - x| \leqslant h_a$, gauname

$$x - h_a \leqslant a \leqslant x + h_a. \tag{5}$$

Griežtesnį absoliutinės paklaidos rėžio apibrėžimą galime suformuluoti šitaip.

Sakykime, X yra aibė visų galimų dydžio a artinių x, gautų matuojant. Tada bet koks skaičius h, tenkinantis sąlygą $|a - x| \leqslant h$ bet kokiam $x \in X$, vadinamas artinių iš aibės X *absoliutinės paklaidos rėžiu*. Mažiausią iš žinomų skaičių h žymėkime h_a. Praktikoje tas skaičius h_a ir laikomas absoliutinės paklaidos rėžiu.

3 pavyzdys. Išmatuoti rulete gatvės plotį galima ne didesniu kaip 1 cm tikslumu. Šiuo atveju absoliutinės matavimo paklaidos apskaičiuoti negalime, nes nežinome tikslios pločio reikšmės. Atsižvelgdami į matavimų tikslumą, galime tvirtinti, kad absoliutinė matavimo paklaida ne didesnė kaip 1 cm, t.y. gautojo artinio absoliutinės paklaidos rėžis gali būti skaičius, lygus 1 cm.

4 pavyzdys. Užrašas $\pi = 3{,}14$ reiškia, kad 3,14 yra skaičiaus π artinys. Absoliutinė to artinio paklaida lygi

$$|\pi - 3{,}14| = 0{,}0015926\ldots < 0{,}002.$$

Absoliutinės paklaidos rėžis lygus 0,002.

5 pavyzdys. Matuojant ritinio skersmenį įrankiu, kurio matavimo tikslumas yra 0,5 mm, gauta apytikslė jo ilgio reikšmė 74 mm.

Remdamiesi tais duomenimis, galime tvirtinti, kad skersmens ilgis d tenkina nelygybę

$$73{,}5 \leqslant d \leqslant 74{,}5.$$

2. **Santykinė paklaida. Santykinės paklaidos rėžis.** Absoliutinė paklaida neapibūdina matavimų kokybės. Sakykime, 1 cm tikslumu matuojame kokį nors ilgį. Toks tikslumas bus nepakankamas, jeigu matuosime pieštuko ilgį. Tačiau matuojant tinklinio aikštelės ilgį arba plotį, 1 cm tikslumas jau bus labai geras.

Išnagrinėsime dar vieną pavyzdį. Išmatavus laido ilgį ir skersmenį, gauti šitokie rezultatai: ilgis $l = 10{,}0 \pm 0{,}1$ m, skersmuo $D = 2{,}5 \pm 0{,}1$ mm. Kuris matavimas yra tikslesnis?

Laido ilgio matavimo paklaida yra 0,1 m = 100 mm, o laido skersmens – 0,1 mm. Atrodytų, kad tiksliau išmatuotas laido skersmuo. Tačiau taip nėra.

Matuojant laido ilgį, 100 mm absoliutinė paklaida tenka 10 000 mm, taigi sudaro $\frac{100}{10\,000} = 1\,\%$ matuojamojo dydžio. Matuojant skersmenį, paklaida sudaro $\frac{0{,}1}{2{,}5} = 4\,\%$ matuojamojo dydžio. Vadinasi, laido ilgis išmatuotas tiksliau.

Matavimo tikslumui įvertinti apibrėžiama santykinės paklaidos sąvoka.

Apibrėžimas. Jeigu dydžio tiksli reikšmė yra skaičius a, o artinio x absoliutinė paklaida lygi $\Delta_a x$, tai santykis $\Delta_a x / |x|$ vadinamas *santykine artinio paklaida* ir žymimas $\omega_a x$, arba ωx.

Vadinasi, pagal apibrėžimą

$$\omega_a x = \frac{\Delta_a x}{|x|}. \tag{1}$$

Santykinė paklaida paprastai išreiškiama procentais.

Ankstesniame pavyzdyje santykinė paklaida, matuojant laido ilgį, buvo 1 %, o matuojant laido skersmenį – 4 %.

Absoliutinė paklaida dažniausiai būna dimensinis dydis, o santykinė – nedimensinis.

1 skirsnyje buvo nurodyta, kodėl sunku rasti absoliutinę artinio paklaidą. Su tokiomis pat kliūtimis susiduriama ieškant santykinės paklaidos. Todėl praktikoje nagrinėjama ne santykinė paklaida, bet vadinamasis santykinės paklaidos rėžis, t.y. toks skaičius E_a, už kurį negali būti didesnė santykinė ieškomojo dydžio artinio paklaida.

Taigi $\omega_a x \leqslant E_a$.

Jeigu h_a yra dydžio a artinių absoliutinės paklaidos rėžis, tai $\Delta_a x \leqslant h_a$, todėl

$$\omega_a x = \frac{\Delta_a x}{|x|} \leqslant \frac{h_a}{|x|}.$$

Akivaizdu, kad bet koks skaičius E, tenkinantis sąlygą $\frac{h_a}{|x|} \leqslant E$, bus santykinės paklaidos rėžis. Praktikoje dažniausiai žinomas kuris nors dy-

džio a artinys x ir absoliutinės paklaidos rėžis. Tada santykinės paklaidos rėžiu laikomas skaičius

$$E_a = \frac{h_a}{|x|}. \tag{2}$$

Pavyzdys. Jeigu $\pi \approx 3{,}14$, tai $\Delta_\pi x < 0{,}002$,

$$\omega_\pi x < \frac{0{,}002}{3{,}14} < \frac{7}{10^4},$$

taigi $E_\pi = 0{,}07\ \%$.

Kartais vietoj E_a patogiau rašyti $E(a)$.

Santykinės paklaidos rėžio sąvoką galima apibrėžti ir šitaip.

Jeigu X yra aibė visų galimų dydžio a artinių x, gautų per vieną procesą, tai bet koks skaičius E, tenkinantis sąlygą $\frac{\Delta_a x}{|x|} \leqslant E$ bet kokiam $x \in X$, vadinamas artinių iš aibės X *santykinės paklaidos rėžiu.* Mažiausią iš žinomų skaičių E pažymėkime E_a. Jį ir laikysime santykinės paklaidos rėžiu.

3. Artinių užrašymas. Užrašant matavimo rezultatą, paprastai nurodomas ir jo absoliutinės paklaidos rėžis.

Pavyzdžiui, jeigu, matuojant 0,5 cm tikslumu, gautas rezultatas 112 cm, tai rašoma:

$$112\ \text{cm} \pm 0{,}5\ \text{cm}.$$

Tačiau skaičiuojant dažnai būna sunku nurodyti artinių paklaidas. Jeigu artinys užrašomas, nenurodant paklaidos, tai iš paties užrašo turi būti galima spręsti apie paklaidos rėžį. Tam reikalui apibrėžiama tikslaus skaitmens sąvoka.

Artinio skaitmuo α vadinamas tiksliu, jeigu absoliutinės paklaidos rėžis yra ne didesnis už pozicijos, kurioje tas skaitmuo užrašytas, vienetą.

Pavyzdžiui, skaičiaus π artinio 3,14 visi skaitmenys yra tikslūs, nes jo absoliutinės paklaidos rėžis $0{,}002 < 0{,}01$.

Aišku, jeigu α yra tikslus skaitmuo, tai ir visi prieš jį esantys skaitmenys yra tikslūs.

Jeigu artinio absoliutinės paklaidos rėžis yra didesnis už kurios nors jo pozicijos vienetą, tai tos pozicijos (ir visų tolesnių pozicijų) skaitmenį vadinsime *abejotinu.*

Užrašant artinį ir nenurodant jo absoliutinės paklaidos rėžio, patartina rašyti tik visus tikslius skaitmenis.

Pavyzdžiui, jeigu kokio nors dydžio artinys yra 23,47, tai visi skaičiaus 23,47 skaitmenys yra tikslūs, o to skaičiaus absoliutinės paklaidos rėžis ne didesnis kaip 0,01.

Jeigu, atliekant skaičiavimus, pradiniuose skaičiuose yra abejotinų skaitmenų, tai tuos skaičius iš pradžių reikia suapvalinti, paliekant vieną abejotiną skaitmenį. Gautąjį rezultatą reikia taip suapvalinti, kad visi jo skaitmenys būtų tikslūs: jeigu abejotini skaitmenys yra dešimtainiai skaičiaus ženklai, tai jie atmetami pagal apvalinimo taisykles, o jeigu abejotini kai kurie sveikosios skaičiaus dalies skaitmenys, tai jie pakeičiami nuliais.

1 pavyzdys. Tarkime, kad ieškomojo dydžio artinys yra 14 535, o to dydžio absoliutinės paklaidos rėžis lygus 50. Paskutiniai du skaičiaus 14 535 skaitmenys yra abejotini. Suapvalinę tą skaičių, gauname 14 500; tačiau kokiu nors kitu atveju galime gauti skaičių 14 500, kurio visi skaitmenys tikslūs. Tuos atvejus skirsime ir skaičių, kuriame vietoj abejotinų skaitmenų yra nuliai, užrašysime šitaip: $145 \cdot 10^2$ arba $14{,}5 \cdot 10^3$.

2 pavyzdys. Žinoma, kad atstumas nuo Žemės iki Saulės yra $1495 \cdot 10^5$ km. Vadinasi, 4 to artinio skaitmenys yra tikslūs.

Jeigu skaičius x yra ieškomojo dydžio artinys, tai visi tikslūs jo skaitmenys, išskyrus nulius, esančius į kairę nuo pirmojo nelygaus nuliui skaitmens, vadinami *reikšminiais skaitmenimis.*

Pavyzdžiui, skaičius 3,14 turi tris reikšminius skaitmenis, skaičius 0,01255 – keturis, skaičius 0,108 – tris, skaičius 0,1200 – keturis, skaičius $126 \cdot 10^3$ – tris reikšminius skaitmenis.

4. Skaičių apvalinimas. Apvalinimo paklaida. Dažnai skaičiuojant tenka apvalinti skaičius, t.y. pakeisti juos skaičiais, turinčiais mažiau reikšminių skaitmenų.

Yra trys skaičių apvalinimo būdai:

1) apvalinimas su trūkumu iki k-ojo reikšminio skaitmens: atmetami visi skaitmenys, pradedant $(k+1)$-uoju;

2) apvalinimas su pertekliumi skiriasi nuo apvalinimo su trūkumu tuo, kad paskutinis paliekamas skaitmuo padidinamas vienetu;

3) apvalinimas su mažiausia paklaida skiriasi nuo apvalinimo su pertekliumi tuo, kad paskutinis paliekamas skaitmuo padidinamas vienetu tik tada, kai pirmasis atmetamas skaitmuo didesnis už 4.

Išimtis: jeigu, apvalinant su mažiausia paklaida, reikia atmesti tik vieną skaitmenį 5, tai paskutinis paliekamas skaitmuo nekeičiamas, kai jis yra lyginis, ir padidinamas 1, kai yra nelyginis.

Tuos apibrėžimus pailiustruosime lentele, apvalindami, pavyzdžiui, skaičių 274, 67.

Iki kurio reikšminio skaitmens apvaliname	Apvalinimo rezultatas		
	su trūkumu	su pertekliumi	su mažiausia paklaida
4-ojo	274,6	274,7	274,7
3-ojo	274	275	275
2-ojo	$27 \cdot 10^1$	$28 \cdot 10^1$	$27 \cdot 10^1$
1-ojo	$2 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^2$

Iš apytikslių skaičių apvalinimo taisyklių išplaukia, kad, apvalinant su mažiausia paklaida, gaunama paklaida būna ne didesnė už paskutinės paliekamos pozicijos vieneto pusę, o apvalinimo su trūkumu arba pertekliumi paklaida gali būti ir didesnė už paskutinės paliekamos pozicijos vieneto pusę, bet ne didesnė už tą vienetą.

Tai pailiustruosime pavyzdžiais.

1 pavyzdys. Jeigu $x=723{,}467$, tai, suapvalinę su mažiausia paklaida iki 5-ojo reikšminio skaitmens, gausime $x\approx 723{,}47$, o

$$\Delta x=0{,}003<\frac{1}{2}\cdot 0{,}01=0{,}005.$$

2 pavyzdys. Suapvalinę skaičių 274,67 su trūkumu iki 4-ojo reikšminio skaitmens, gausime 274,6. Absoliutinė apvalinimo paklaida yra 0,07, taigi $0{,}07>\frac{1}{2}\cdot 0{,}1$, bet $0{,}07<0{,}1$, t.y. apvalinimo paklaida didesnė už paskutinės paliekamos pozicijos vieneto pusę, bet mažesnė už tą vienetą. Suapvalinus skaičių 274,67 su pertekliumi arba mažiausia paklaida iki 4-ojo reikšminio skaitmens, absoliutinė paklaida lygi 0,03, todėl $0{,}03<<\frac{1}{2}\cdot 0{,}1$. Taigi čia paklaida yra mažesnė už paskutinės paliekamos pozicijos vieneto pusę.

Jeigu skaičius x yra kokio nors dydžio artinys, tai, jį apvalinant, prie pradinės paklaidos pridedama apvalinimo paklaida.

3 pavyzdys. Skaičius 7,436 yra artinys ieškomojo dydžio, kurio tiksli reikšmė lygi a, t.y. $a\approx 7{,}436$. Remiantis artinių užrašymo taisykle, to artinio absoliutinės paklaidos rėžis lygus 0,001. Jeigu skaičių 7,436 suapvalinsime iki 2-ojo reikšminio skaitmens, tai gausime $a\approx 7{,}4$ ir paklaida bus $\Delta_a=0{,}001+0{,}036=0{,}037$; čia skaičius 0,036 yra apvalinimo paklaida.

§ 2. SKAIČIAVIMŲ SU APYTIKSLIAIS DUOMENIMIS PAKLAIDOS

1. Sumos paklaida. Pažymėkime x kurį nors dydžio a artinį, y – kurį nors dydžio b artinį, Δx ir Δy – artinių x ir y paklaidas. Rasime sumos $x+y$, kuri yra sumos $a+b$ artinys, absoliutinės paklaidos rėžį h_{a+b}.

Turime

$$a=x+\Delta x,$$
$$b=y+\Delta y.$$

Sudėję tas dvi lygybes, gausime

$$a+b=x+y+\Delta x+\Delta y.$$

Akivaizdu, kad artinių x ir y sumos paklaida yra lygi dėmenų paklaidų sumai, t.y.

$$\Delta (x+y)=\Delta x+\Delta y.$$

Žinome, kad sumos modulis ne didesnis už dėmenų modulių sumą. Todėl

$$|\Delta (x+y)|=|\Delta x+\Delta y|\leqslant|\Delta x|+|\Delta y|. \quad (1)$$

Matome, kad artinių sumos absoliutinė paklaida yra ne didesnė už dėmenų absoliutinių paklaidų sumą. Vadinasi, sumos absoliutinės paklaidos rėžiu galime laikyti dėmenų absoliutinių paklaidų rėžių sumą.

Pažymėkime h_a dydžio a absoliutinės paklaidos rėžį, o h_b – dydžio b absoliutinės paklaidos rėžį. Tada

$$h_{a+b}=h_a+h_b. \quad (2$$

1 pavyzdys. Ieškant trikampio perimetro, buvo išmatuotos jo kraštinės ir gauta: $a=63{,}4\pm0{,}1$ m, $b=47{,}8\pm0{,}1$ m, $c=73{,}1\pm0{,}1$ m.

Taigi $P\approx a+b+c=$ 63,4 m+47,8 m+73,1 m$\approx$184,3 m, $h_{a+b+c}=$ $=h_a+h_b+h_c=0{,}3$ m, t.y. $P=184{,}3\pm0{,}3$ m.

Iš (2) formulės išplaukia, kad sumos absoliutinės paklaidos rėžis negali būti mažesnis už kiekvieno, nors ir paties netiksliausio artinio absoliutinės paklaidos rėžį. Kad ir kokiu tikslumu nustatinėtume kitą dėmenį, sumos tikslumo nepadidinsime.

Iš čia išplaukia artinių sudėties taisyklė, kuria kartais remiamasi skaičiuojant.

Sudėjus kokių nors dydžių artinius, sumoje reikia palikti po kablelio tiek skaitmenų, kiek yra mažiausiai jų turinčiame artinyje.

2 pavyzdys. Apskaičiuosime artinių sumą

$$3{,}21017+0{,}43+0{,}027215.$$

Suapvalinę pirmąjį ir trečiąjį dėmenis iki dviejų skaitmenų po kablelio ir sudėję, gauname

$$3{,}21+0{,}43+0{,}03=3{,}67.$$

Jeigu sudėtume nesuapvalinę, tai gautume skaičių 3,667385, kurio absoliutinės paklaidos rėžis būtų 0,010011. Vadinasi, skaičiaus 3,667385 paskutinių keturių pozicijų skaitmenys būtų abejotini ir juos reikėtų atmesti.

2. Skirtumo paklaida. Pažymėkime Δx ir Δy dydžių a ir b artinių x ir y paklaidas. Tada

$$a=x+\Delta x,$$

$$b=y+\Delta y.$$

Iš pirmosios lygybės atėmę antrąją, gausime

$$a-b=(x-y)+(\Delta x-\Delta y).$$

Akivaizdu, kad artinių skirtumo paklaida yra lygi turinio ir atėminio paklaidų skirtumui, t.y.

$$\Delta(x-y)=\Delta x-\Delta y,$$

arba

$$\Delta(x-y)=\Delta x+(-\Delta y).$$

Samprotaudami taip pat, kaip ir 1 skirsnyje, gausime

$$|\Delta(x-y)|=|\Delta x+(-\Delta y)|\leqslant|\Delta x|+|\Delta y|.$$

Matome, kad absoliutinė skirtumo paklaida ne didesnė už turinio ir atėminio absoliutinių paklaidų sumą.

Skirtumo absoliutinės paklaidos rėžiu galime laikyti turinio ir atėminio absoliutinių paklaidų rėžių sumą.

Vadinasi,

$$h_{a-b}=h_a+h_b. \qquad (1)$$

1 pavyzdys. Saldainių dėžės masė $m=7{,}3\pm 0{,}05$ kg, o tuščios dėžės masė $m_1=0{,}82\pm 0{,}05$ kg. Rasime saldainių masę m_2:

$$m_2\approx m-m_1=7{,}3-0{,}82=6{,}48 \text{ (kg)},$$

$$h_{m_2}=h_m+h_{m_1}=0{,}05+0{,}05=0{,}1 \text{ (kg)}.$$

Vadinasi, $m_2=6{,}48\pm 0{,}1$ kg, arba suapvalinus $m_2=6{,}5\pm 0{,}12$ kg.

Pagal (1) formulę skirtumo absoliutinės paklaidos rėžis negali būti mažesnis už kiekvieno artinio absoliutinės paklaidos rėžį. Iš čia išplaukia artinių atimties taisyklė, kuria remiamasi skaičiuojant.

Atėmus kokių nors dydžių artinius, skirtume reikia palikti po kablelio tiek skaitmenų, kiek yra mažiausiai jų turinčiame artinyje.

2 pavyzdys. Ieškodami skirtumo 1541,23 – 20,1143, po kablelio galime palikti tik du skaitmenis – tai neturės įtakos rezultato tikslumui. Tad

$$1541{,}23-20{,}11=1521{,}12.$$

3. Sandaugos paklaida. Nagrinėsime skaičių x ir y, kurie yra dydžių a ir b artiniai, sandaugą. Artinio x paklaidą pažymėkime Δx, o artinio y paklaidą – Δy.

Tada

$$a=x+\Delta x,$$

$$b=y+\Delta y.$$

Sudauginę tas lygybes, gausime

$$ab=xy+\Delta x\cdot y+x\cdot\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y.$$

Sandaugos xy absoliutinė paklaida yra

$$|ab-xy|=|\Delta x\cdot y+x\cdot\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y|,$$

todėl

$$|ab-xy|\leqslant|\Delta x\cdot y|+|x\cdot\Delta y|+|\Delta x\cdot\Delta y|.$$

Padalykime abi nelygybės puses iš $|xy|$:

$$\frac{|ab-xy|}{|xy|}\leqslant\frac{|\Delta x\cdot y|}{|xy|}+\frac{|x\cdot\Delta y|}{|xy|}+\frac{|\Delta x\cdot\Delta y|}{|xy|}.$$

Atsižvelgę į tai, kad sandaugos modulis yra lygus daugiklių modulių sandaugai, gausime

$$\frac{|ab-xy|}{|xy|}\leqslant\frac{|\Delta x|}{|x|}+\frac{|\Delta y|}{|y|}+\frac{|\Delta x|}{|x|}\cdot\frac{|\Delta y|}{|y|}.$$

Kairioji nelygybės pusė yra sandaugos xy santykinė paklaida, $\frac{|\Delta x|}{|x|}$ – artinio x santykinė paklaida, o $\frac{|\Delta y|}{|y|}$ – artinio y santykinė paklaida. Vadinasi, atmetę mažą dydį $\frac{|\Delta x|}{|x|} \cdot \frac{|\Delta y|}{|y|}$, gausime nelygybę

$$\omega_{ab} xy \leqslant \omega_a x + \omega_b y.$$

Taigi artinių sandaugos santykinė paklaida yra ne didesnė už daugiklių santykinių paklaidų sumą. Todėl daugiklių santykinių paklaidų suma yra sandaugos santykinės paklaidos rėžis, t.y.

$$E_{ab} = E_a + E_b. \quad (1)$$

1 pavyzdys. Kambario plotis $a=4{,}0 \pm 0{,}05$ m, ilgis $b=5{,}4 \pm 0{,}05$ m. Rasime jo plotą.

Kadangi $S \approx 4{,}0 \cdot 5{,}4 = 21{,}6$ (m²) ir $E_S \approx E_a + E_b = \frac{0{,}05}{4{,}0} + \frac{0{,}05}{5{,}4}$, tai, remiantis 1 paragrafo 2 skirsnio (2) lygybe, $h_S = S \cdot E_S = 0{,}47$. Taigi $S = 21{,}6 \pm 0{,}47$ (m²).

Remiantis (1) formule, sandaugos santykinės paklaidos rėžis negali būti mažesnis už netiksliausio daugiklio santykinės paklaidos rėžį. Todėl, kaip ir ankstesniuose veiksmuose, nėra prasmės dauginti skaičius su nereikalingais reikšminiais skaitmenimis.

Skaičiavimams supaprastinti kartais taikoma šitokia taisyklė.

Sudauginus artinius, kuriuose yra skirtingas reikšminių skaitmenų skaičius, sandaugoje reikia palikti tiek reikšminių skaitmenų, kiek yra mažiausiai jų turinčiame artinyje.

2 pavyzdys. Rasime artinių $x_1 = 16{,}43$ ir $x_2 = 2{,}7539$ sandaugą.

Sudauginę skaičius x_1 ir x_2 ir sandaugą suapvalinę iki ketvirtojo reikšminio skaitmens, gausime $x_1 \cdot x_2 = 45{,}25$.

4. Dalmens paklaida. Jeigu x yra dydžio a artinys su paklaida Δx, o y – dydžio b artinys su paklaida Δy, tai

$$a = x + \Delta x,$$

$$b = y + \Delta y,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y}.$$

Iš pradžių rasime dalmens absoliutinę paklaidą

$$\left| \Delta \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{\Delta x \cdot y - x \cdot \Delta y}{y(y + \Delta y)} \right|,$$

po to – santykinę paklaidą

$$\omega_{\frac{a}{b}}\frac{x}{y}=\frac{\left|\Delta\frac{x}{y}\right|}{\left|\frac{x}{y}\right|}=\left|\frac{\Delta x\cdot y-x\cdot\Delta y}{x(y+\Delta y)}\right|=\left|\frac{y}{y+\Delta y}\cdot\frac{\Delta x}{x}-\frac{y}{y+\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{y}\right|=$$

$$=\left|\frac{y}{y+\Delta y}\right|\cdot\left|\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

Atkreipsime dėmesį, kad Δy, palyginus su y, yra mažas, todėl trupmenos $\frac{y}{y+\Delta y}$ modulį galime laikyti lygiu vienetui. Tad

$$\omega_{\frac{a}{b}}\frac{x}{y}=\left|\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta y}{y}\right|\leqslant\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

Matome, kad dalmens santykinė paklaida ne didesnė už dalinio ir daliklio santykinių paklaidų sumą. Vadinasi, dalmens santykinės paklaidos rėžis yra lygus dalinio ir daliklio santykinių paklaidų rėžių sumai, t.y.

$$E_{\frac{a}{b}}=E_a+E_b. \qquad (1)$$

Pavyzdys. Apskaičiuosime $u=\frac{x}{y}$, kai

$$x=47{,}2\pm0{,}5, \quad y=19{,}4\pm0{,}1.$$

Gauname

$$u\approx\frac{47{,}2}{19{,}4}\approx2{,}43,$$

$$E_u=\frac{0{,}5}{47{,}2}+\frac{0{,}1}{19{,}4}\approx0{,}0159,$$

$$h_u=u\cdot E_u\approx2{,}43\cdot0{,}0159\approx0{,}039,$$

$$u=2{,}43\pm0{,}039,$$

o suapvalinus

$$u=2{,}43\pm0{,}04.$$

5. Laipsnio ir šaknies paklaida. 1) Tarkime, kad $u=a^n$ (čia n – natūrinis skaičius) ir $a\approx x$. Jeigu E_a yra dydžio a artinio x santykinės paklaidos rėžis, tai

$$u=a^n\approx x^n=\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ daugiklių}},$$

todėl

$$E_u=\underbrace{E_a+E_a+\ldots+E_a}_{n\text{ dėmenų}}=n\cdot E_a.$$

Vadinasi, laipsnio santykinės paklaidos rėžis yra lygus pagrindo santykinės paklaidos rėžio ir laipsnio rodiklio sandaugai, t.y.

$$E_u = n \cdot E_a. \qquad (1)$$

2) Tarkime, kad $u=\sqrt[n]{a}$ (čia n – natūrinis skaičius) ir $a \approx x$.
Remiantis (1) formule,

$$E_a = nE_u,$$

todėl

$$E_u = \frac{E_a}{n}. \qquad (2)$$

Vadinasi, n-ojo laipsnio šaknies santykinės paklaidos rėžis yra n kartų mažesnis už pošaknio skaičiaus santykinės paklaidos rėžį.

Išspręsime uždavinį, remdamiesi gautosiomis formulėmis.

Uždavinys. Rutulio masė $m=34{,}7 \pm 0{,}05$ kg, jo skersmuo $D = 2{,}49 \pm 0{,}01$ dm. Rasime to rutulio medžiagos tankį d.

Sprendimas. 1. Užrašysime formulę tankiui skaičiuoti:

$$d = \frac{m}{v}; \quad \text{čia} \quad v = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Tad

$$d = \frac{6m}{\pi D^3}.$$

2. Sudarysime skaičiavimų schemą. Imsime $\pi = 3{,}142 \pm 0{,}0005$:

m	34,7
$6m$	208,2
π	3,142
D	2,49
D^2	6,200
D^3	15,44
πD^3	48,51
$d = \frac{6m}{\pi D^3}$	4,29 (kg/dm^3).

3. Apskaičiuosime santykinės paklaidos rėžį:

$$E(d) = E(m) + E(\pi) + 3E(D),$$

$$E(m) = \frac{0{,}05}{34{,}7} < 0{,}0015,$$

$$E(\pi) = \frac{0{,}0005}{3{,}142} < 0{,}00016,$$

$$3E(D) = \frac{3 \cdot 0{,}01}{2{,}49} = \frac{1}{83} < 0{,}0122,$$

$$E(d) = 0{,}0139.$$

4. Apskaičiuosime absoliutinės paklaidos rėžį:

$$h_d = d \cdot E(d) = 4{,}29 \cdot 0{,}0139 < 0{,}0597 < 0{,}06.$$

Todėl

$$d = 4{,}29 \pm 0{,}06 \text{ kg/dm}^3,$$

arba suapvalinus

$$d = 4{,}3 \pm 0{,}07 \text{ kg/dm}^3.$$

6. Atvirkštinis apytikslių skaičiavimų uždavinys. Sprendžiant tiesioginį uždavinį, reikia rasti apytikslę funkcijos $u = f(x, y, ..., z)$ reikšmę, kai duotos apytikslės argumentų reikšmės

$$x = a \pm \Delta a, \quad y = b \pm \Delta b, \quad ..., \quad z = c \pm \Delta c,$$

ir paklaidos h_u rėžį. Ta paklaida yra kokia nors argumentų paklaidų funkcija, t.y.

$$h_u = \varphi(h_x, h_y, ..., h_z). \qquad (1)$$

Dažnai praktikoje tenka spręsti ir atvirkštinį uždavinį: nustatyti tokį argumentų $x, y, ..., z$ reikšmių tikslumą, kad funkcijos $u = f(x, y, ..., z)$ reikšmės būtų apskaičiuotos iš anksto nurodytu tikslumu h_u.

Vadinasi, sprendžiant atvirkštinį uždavinį, nežinomieji yra argumentų paklaidų rėžiai, kurie kartu su duotuoju funkcijos paklaidos rėžiu h_u tenkina (1) lygtį. Čia reikia sudaryti ir išspręsti lygtį $h_u = \varphi(h_x, h_y, ..., h_z)$ kintamųjų $h_x, h_y, ..., h_z$ atžvilgiu. Ta lygtis arba turi be galo daug sprendinių, arba visai jų neturi. Uždavinį laikysime išspręstu, jeigu rasime bent vieną lygties sprendinį.

Atvirkštinis uždavinys dažnai būna neapibrėžtas, todėl jam spręsti reikia papildomų sąlygų, kad ieškomos paklaidos tenkintų tam tikrus sąryšius, pavyzdžiui, kad jos būtų tarpusavyje lygios. Tuo atveju gauname lygtį su vienu nežinomuoju.

1 pavyzdys. Žinoma, kad kvadrato kraštinė a didesnė kaip 9 cm, bet mažesnė kaip 10 cm. Kokiu tikslumu reikia išmatuoti kvadrato kraštinę, kad ploto paklaida būtų ne didesnė kaip 1 cm²?

Ilgio a artinį pažymėkime x, o absoliutinės paklaidos rėžį — h_a. Tada

$$E(a^2) = 2E(a) = \frac{2h_a}{x}.$$

Ploto absoliutinė paklaida

$$\Delta S = E(a^2) \cdot S = E(a^2) \cdot x^2 = \frac{2h_a}{x} \cdot x^2 = 2h_a \cdot x,$$

$$2h_a \cdot x = 1 \text{ cm}^2,$$

$$2 \cdot h_a \cdot 9, \ldots = 1 \text{ cm}^2.$$

Iš čia gauname: su trūkumu $h_a = 0{,}05$ cm. Taigi kvadrato kraštinę reikia išmatuoti 0,5 mm = 0,05 cm tikslumu.

2 pavyzdys. Kiek $\sqrt{5}$ reikšminių skaitmenų reikia imti, kad paklaida būtų ne didesnė kaip 0,3%?

Turime

$$a=\sqrt{5}=2, \ldots,$$

$$E_a=0{,}003,$$

$$h_a=a \cdot E_a>2 \cdot 0{,}003=0{,}006.$$

Vadinasi, $x=2, \ldots \pm 0{,}006$, taigi $\sqrt{5}$ reikia imti su trimis tiksliais skaitmenimis.

§ 3. SKAIČIAVIMAI ŠIUOLAIKINIAME MOKSLE IR TECHNIKOJE

Nuo senovės skaičiavimai ir matavimai vaidina svarbų vaidmenį visuomenės gyvenime. Nustatyti derliaus kiekį, išmatuoti indų talpą ir žemės sklypų plotą, atlikti skaičiavimus, statant stambius įrenginius, įvairius astronominius skaičiavimus – tai anaiptol ne visi uždaviniai, kuriuos žmonės turėjo spręsti dar gilioje senovėje.

Vienas iš labiausiai jaudinančių netolimos praeities įvykių – kosmoso įsisavinimas. Jaudindamiesi sekame žmonių skridimus kosmose, kosmonautų išsilaipinimą Mėnulyje, pilotuojamų orbitinių stočių kūrimą ir t.t. Tai – pirmieji kosminės erdvės užkariavimo etapai. Ar jie buvo galimi be matematinės teorijos? Ne. Matematiniai metodai, tarp jų ir skaičiavimai, čia suvaidinio svarbų vaidmenį. Paleisti kosminį laivą būtų neįmanoma, tiksliai neapskaičiavus jo judėjimo, o tai – didžiuliai ir sudėtingi skaičiavimai.

Dabar, mokslinės ir techninės revoliucijos periodu, matematinių metodų reikšmė vis didėja. Jie taikomi chemijoje, biologijoje, medicinoje, ekonomikoje, istorijoje ir lingvistikoje. Teorinių ir praktinių klausimų sprendimas dažnai baigiamas skaičiavimais.

Matematikams ir inžinieriams tenka atlikti didžiulius skaičiavimus, susijusius su kasdienine pramonės įmonių, mokslinių institutų, valstybinių įstaigų, tarybinių ūkių ir kolūkių veikla.

Skaičiavimo metodai dabar plačiai taikomi ekonomikoje, planuojant šalies liaudies ūkio, srities, atskiros gamyklos veiklą, organizuojant gamybą.

Sprendžiant daugelį uždavinių, skaitiniam rezultatui gauti reikia tiek skaičiavimų, kiek jau neįstengia vienas žmogus. Štai keli tokių uždavinių pavyzdžiai: apskaičiuoti tampriuosius įtempimus užtvankoje, oro pasipriešinimą skrendantiems lėktuvams, sviedinių trajektorijas. Tą sudėtingą darbą atlieka dešimtys inžinierių skaičiuotojų, pasitelkę įvairias skaičiavimo mašinas.

Elektroninės skaičiavimo mašinos padarė revoliuciją skaičiavimo technikoje. Tačiau, kad mašina išspręstų matematinį uždavinį ir gautų skaitinius rezultatus, taip pat reikia daugelio skaičiuotojų triūso. ESM sukūrimas paskatino vystytis pačią matematiką, ypač jos taikomąsias šakas.

Dabar daugeliui mokslo ir technikos laimėjimų skaičiavimai suvaidina ne pagalbinį, bet svarbiausią vaidmenį. Visada, kai reikia iki galo išspręsti kokį nors matematinį praktinio pobūdžio uždavinį, būtina gauti skaitinį rezultatą. Jeigu pradiniai duomenys yra apytiksliai, tai ir rezultatas negali būti bet kokio tikslumo. Reikia mokėti įvertinti pradinių duomenų tikslumą, taip pat nustatyti būsimo rezultato tikslumą ir žinoti, koks tikslumas reikalingas praktikoje, taikant gautuosius skaitinius rezultatus. Vienuose uždaviniuose reikalaujama labai tikslių rezultatų, kituose didesnio tikslumo nereikia. Taigi skaičiuoti reikia taip, kad būtų gauti norimo tikslumo rezultatai, atliekant mažiausiai darbo. Tam tikslui reikia: 1) išmokti skaičiavimų su apytiksliais duomenimis principus ir taisykles; 2) įsigyti reikiamus įgūdžius skaičiuoti turimomis priemonėmis: įvairiais mintinio skaičiavimo būdais, matematinėmis lentelėmis, skaitliukais, logaritmine skaičiavimo liniuote, aritmometru, pusiau automatinėmis ir automatinėmis skaičiavimo mašinomis.

§ 4. SKAIČIAVIMO TECHNIKA

1. Stalinės mašinos. Dabar, taip audringai vystantis technikai, daugeliui praktinių uždavinių spręsti reikalingos efektyvios skaičiavimo priemonės ir mašinos.

Atsižvelgiant į pradinių duomenų tikslumą ir galutinį tikslą, yra naudojamos įvairios skaičiavimo priemonės. Skaitliukai, logaritminė skaičiavimo liniuotė ir matematinės lentelės daugelio masinių profesijų darbuotojams padeda atlikti visokiausius apskaičiavimus, taupyti laiką ir darbą.

Kai kuriems nelabai didelės apimties skaičiavimams naudotinos stalinės klavišinės skaičiavimo mašinos.

1. Aritmometras. Tai paprasčiausia visiems prieinama skaičiavimo mašina, vis dar naudojama įvairiose pramonės šakose, ūkinėje ir administracinėje, taip pat finansų ir statistikos organų veikloje. Plačiausiai žinomi šių rūšių aritmometrai: svirtiniai („Feliks" tipo) ir klavišiniai (BK-1 tipo). Aritmometru galima atlikti keturis aritmetikos veiksmus su skaičiais, kurių dešimtainėje išraiškoje yra ne daugiau kaip 9 pozicijos, o rezultate – 13 pozicijų.

2. Elektromechaninės stalinės klavišinės skaičiavimo mašinos (automatai ir pusautomačiai). Tos mašinos yra varomos elektra, pradiniai duomenys įvedami rankiniu būdu. Automatai patys daugina ir dalija, pusautomačiai – tik dalija.

Tokiomis mašinomis galima atlikti aritmetinius veiksmus su skaičiais, kurių išraiškoje yra ne daugiau kaip 9 pozicijos, o veiksmų rezultate – ne daugiau kaip 17 pozicijų.

3. Elektroninės stalinės klavišinės mašinos („Iskra", „Elektronika", „Helati", „Rasa", ЭДВМ).

„Iskra-110" atlieka keturis aritmetikos veiksmus, taip pat skaičiuoja $a^n + bp^n$ pavidalo ir kitokius reiškinius. Visi veiksmai atliekami su 8 pozicijų skaičiais; kablelio padėtis skaičiuje nustatoma perjungikliu.

Mašina „Elektronika-DD“ ne tik atlieka keturis aritmetikos veiksmus, bet ir skaičiuoja procentus, traukia kvadratines šaknis ir atlieka įvairius kombinatorikos skaičiavimus. Šioje mašinoje yra atminties blokas, todėl ji atlieka sudėtingus skaičiavimus ir pusiau automatiškai (nereikia užrašinėti tarpinių skaičiavimų ir pakartotinai įvedinėti skaičių), traukia kvadratinę šaknį pagal iteracinę formulę

$$y_n = \frac{\frac{x}{y_{n-1}} + y_{n-1}}{2};$$

čia x yra pošaknio reiškinys, o y_{n-1} — šaknies artinys.

Dešimties klavišų skaičiavimo mašina ЭДВМ automatiškai atlieka įvairius skaičiavimus su 16 pozicijų skaičiais, taip pat pusiau automatiškai traukia n-ojo laipsnio šaknį ir skaičiuoja natūrines tangento bei kotangento reikšmes su 10 tikslių skaitmenų. Mašina „Elektronika-70“ skaičiuoja dešimtainius logaritmus, rodiklines funkcijas, trigonometrines ir atvirkštines trigonometrines funkcijas.

2. Šiuolaikinės skaičiavimo mašinos. Stalinės klavišinės skaičiavimo mašinos, apibūdintos ankstesniame skirsnyje, yra taikomos daugeliui nelabai didelės apimties skaičiavimų. Tačiau dabar, kai mūsų pramonėje ir žemės ūkyje naudojama vis daugiau technikos, sparčiai vystosi mokslas, vis daugiau ir daugiau taikomos visokiausiems skaičiavimams specialios mašinos. Pasitelkęs greitaeiges elektronines skaičiavimo mašinas (ESM), per sekundę atliekančias milijonus operacijų, tyrinėtojas jau gali spręsti tokius uždavinius, kokių anksčiau net nekeldavo, nes jų sprendimui būtų reikėję per daug laiko.

Skaičiavimo mašinos yra dviejų rūšių — analoginės ir skaitmeninės. Skaitmeninė skaičiavimo mašina atlieka veiksmus tiesiog su skaičiais (skaitmenimis). Analoginė mašina atlieka veiksmus su skaičiais, kuriuos pakeičia kokie nors fizikiniai dydžiai — elektros įtampos, ilgiai ir t.t.

Kai kurios didžiosios skaičiavimo mašinos yra sukurtos specialiai kokiam nors vienam tikslui (pavyzdžiui, orui prognozuoti), bet dauguma jų yra universalios, t.y. skirtos įvairiausiems uždaviniams spręsti. Išnagrinėsime keletą uždavinių, sprendžiamų elektroninėmis skaičiavimo mašinomis.

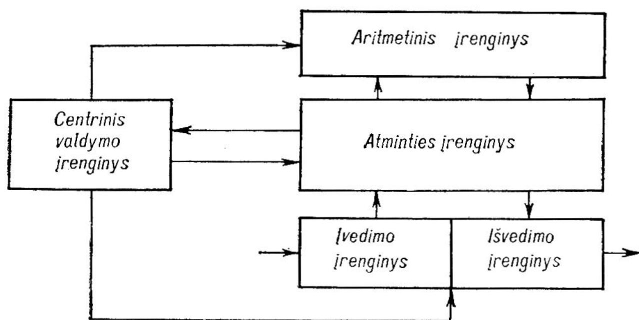
ESM yra naudojamos, pavyzdžiui, skaitiniam lygčių sprendimui. Pirmosios skaičiavimo mašinos ir buvo sukurtos tokiems skaičiavimams. Šiuo metu ESM sėkmingai taikomos technologinių procesų valdymui dideliuose chemijos kompleksuose.

Skaičiavimo mašinos prijungiamos prie prietaisų, automatiškai valdančių tą ar kitą procesą. Jeigu greitam procesui valdyti reikia sudėtingų skaičiavimų su gautais to proceso eigoje duomenimis, tai be ESM tai būtų apskritai neįmanoma. Norint geriausiai panaudoti turimus išteklius (žaliavas, mašinas, transportą ir kt.), vėl reikia spręsti skaičiavimo mašinomis savotiškus minimalių ir maksimalių reikšmių ieškojimo uždavinius.

Komerciniams skaičiavimams, statistinių duomenų, informacijos apdorojimui ir daugeliui kitų svarbių darbų reikalingos šiuolaikinės skaičiavimo mašinos.

ESM gali atlikti logines operacijas, spręsti logikos uždavinius. Pavyzdžiui, remiantis naftingų klodų tyrinėjimo rezultatais ir atsižvelgiant į grunto savybes, nustatomos vietos, kuriose tikslingiausia gręžti gręžinius. Kitas pavyzdys: žaidimas šachmatais ESM. Tuo tikslu yra sudaroma programa loginėms, o ne skaičiavimo operacijoms.

Principinė mašinos schema pavaizduota 1 paveiksle.



1 pav.

Pagrindiniai skaitmeninių skaičiavimo mašinų įrenginiai yra šie:

1) atminties įrenginys (pakankamos apimties), įsimenantis pradinius duomenis ir darbo programą;

2) aritmetinis įrenginys, atliekantis aritmetines operacijas;

3) loginis įrenginys, atliekantis logines operacijas ir sprendžiantis apie informacijos apdorojimo procesus;

4) centrinis valdymo įrenginys, koordinuojantis operacijų atlikimą. Jis yra susijęs su kitais mašinos įrenginiais ir paskirsto informaciją, išreikštą elektriniais impulsais.

Impulsų sekos gali būti vaizduojamos raidėmis ir skaičiais, t.y. užrašomos vadinamąja mašinine kalba.

Pradinius duomenis mašina apdoroja pagal programą, sudarytą iš komandų, užrašytų mašinine kalba. Programa įvedama į mašinos atmintį. Taigi, apdorojant informaciją, naudojami dviejų rūšių duomenys: duomenys, su kuriais atliekamos operacijos, ir komandos, pagal kurias tos operacijos valdomos.

Centrinis valdymo įrenginys išrenka iš atminties abiejų rūšių duomenis ir laiduoja teisingą komandų interpretavimą.

Įvedimo ir išvedimo įrenginiai įprastinę kalbą pakeičia mašinine ir atvirkščiai.

Šiuo metu yra daug įvairių rūšių elektroninių skaičiavimo mašinų. Sprendžiant labai sudėtingus uždavinius, naudojamos БЭСМ tipo mašinos (БЭСМ-2, БЭСМ-4, БЭСМ-6). Jos atlieka operacijas labai sparčiai ir turi talpią atmintį. Vis dar gana paplitusios „Minsk“ tipo („Minsk-2“, „Minsk-22“, „Minsk-32“), taip pat M tipo (M-20, M-220) ir „Ural“ tipo („Ural-4“, „Ural-11“, „Ural-14“) ESM. Jomis sprendžiami sudėtingi mokslo ir gamybos uždaviniai. Mažagabaritės ESM „Promin“, „Nairi“,

„Mir“ valdomos labai paprastai ir plačiai taikomos, operatyviai sprendžiant inžinerinius ir ekonominius uždavinius[1].

Galime tikėtis, kad su elektroninių mašinų pagalba netolimoje ateityje galėsime atsakyti į daugelį dabar mus dominančių klausimų. Atsiras naujos matematikos taikymo kituose moksluose perspektyvos, iškils naujos spręstinos matematinės problemos.

Pratimai

1. Kodėl negalima šviesos greičio tuštumoje užrašyti šitaip: $c=300\,000$ km/s? Kaip tą užrašą ištaisyti, jeigu žinomas tik pirmasis to skaičiaus skaitmuo?

2. Kuo skiriasi užrašai

$$4{,}508;\quad 0{,}4508\cdot 10;\quad 0{,}04508\cdot 10^2?$$

3. Kiekviename apytiksliame skaičiuje nurodykite tikslius ir abejotinus skaitmenis:

0,4035, paklaida 0,0025,

3,20 kg, paklaida 0,005 kg,

5137 m, paklaida 10 m.

Suapvalinkite duotuosius skaičius taip, kad kiekviename būtų ne daugiau kaip vienas abejotinas skaitmuo, ir raskite naujas paklaidas.

4. Užrašykite skaičių π su trimis ir keturiais ženklais po kablelio ir raskite paklaidas.

5. Užrašykite $\sqrt{3}$ su keturiais ženklais po kablelio ir raskite absoliutinės to artinio paklaidos rėžį.

6. 23,37 km ilgis buvo išmatuotas 5 m tikslumu. Raskite absoliutinės paklaidos rėžį.

7. Daugeliu bandymų buvo nustatyta, kad šviesos greitis tuštumoje yra ne mažesnis kaip 299 700 ir ne didesnis kaip 300 000 km/s. Raskite absoliutinės paklaidos rėžį, kai šviesos greitis, kaip paprastai, imamas lygiu 300 000 km/s.

8. Pailiustruokite pavyzdžiais, kodėl apie dydžio tikslumą sprendžiama iš santykinės, o ne iš absoliutinės paklaidos.

9. Paaiškinkite, kodėl paklaidos reikšmę užtenka apskaičiuoti su vienu arba daugiausia su dviem reikšminiais skaitmenimis ir nėra prasmės imti daugiau reikšminių skaitmenų; kodėl, apvalinant paklaidą, reikia ją didinti, bet negalima mažinti.

10. Raskite rėžį santykinės paklaidos, gaunamos, užrašius trupmenas 7/9, 5/7 dešimtainėmis trupmenomis su 4 ženklais po kablelio.

11. 18,40 km ilgis buvo išmatuotas 50 m tikslumu. Raskite matavimo rezultato santykinės ir absoliutinės paklaidų rėžius.

12. Skaičius 9,8066 yra sunkio jėgos pagreičio artinys su penkiais tiksliais skaitmenimis (45° platumoje). Raskite absoliutinės ir santykinės to artinio paklaidų rėžius.

13. $x=28{,}54\pm 0{,}7$. Suapvalinkite tą skaičių taip, kad jame būtų ne daugiau kaip vienas abejotinas skaitmuo, po to raskite gautojo skaičiaus santykinės paklaidos rėžį.

14. Raskite skaičiaus a santykinės paklaidos rėžį, kai $x=a\pm 0{,}02\,a$.

15. Raskite artinio santykinės paklaidos rėžį, kai $|x-a|\leqslant 0{,}004\,a$.

16. Kiek reikšminių skaitmenų reikia imti, traukiant šaknį $\sqrt{10}$, kad apytikslė šaknies reikšmė būtų 0,005% tikslumo?

17. Varinio laido ilgis $l=58{,}3\pm 0{,}05$ m, masė $m=265\pm 1$ g, vario tankis $d=8{,}8\pm$ $\pm 0{,}05$ g/cm^3. Raskite to laido skersmenį.

[1] Šiuo metu sparčiai įdiegiamos Vieningosios sistemos (EC) mašinos. — *Vert. past.*

18. Nustatant sunkio jėgos pagreitį g švytuoklės metodu, naudojama formulė $g=\pi^2 \frac{l}{t^2}$; čia l – švytuoklės ilgis, t – jos paprastojo svyravimo periodas. Išmatavus vieno bandymo metu dydžius l ir t, buvo gauti šie rezultatai:

$$l=50{,}02 \pm 0{,}01 \text{ cm},$$

$$t=0{,}7098 \pm 0{,}0001 \text{ s}.$$

Remdamiesi tais duomenimis, raskite sunkio jėgos pagreitį g ir jo paklaidų (absoliutinės ir santykinės) rėžius.

19. Apskaičiuokite kampinį greitį iš formulės $\omega=\frac{\varphi}{t}$, kai $\varphi=23° \pm 1°$, $t=18 \pm 1$ s.

20. Raskite žibalo, esančio ritinio formos inde, masę, kai indo pagrindo spindulys lygus $8{,}6 \pm 0{,}1$ dm, aukštinė $21{,}4 \pm 0{,}05$ dm, žibalo tankis $0{,}8 \pm 0{,}05$ kg/dm^3.

II SKYRIUS

Paprasčiausios aibių teorijos ir matematinės logikos sąvokos

§ 5. AIBĖS IR JŲ VEIKSMAI

1. Aibė ir jos elementai. Poaibiai. Aibę galima įsivaizduoti kaip turinčių tam tikrą savybę daiktų sankaupą, visumą, rinkinį (klasės mokinių aibė, abėcėlės raidžių aibė, dešimtainės sistemos skaitmenų aibė, pirmosios dešimties skaičių aibė, natūrinių skaičių aibė, tiesės taškų aibė, knygų lentynoje aibė ir t.t.).

Aibę sudarantys daiktai yra vadinami jos *elementais* (pavyzdžiui, raidė „k“ – abėcėlės raidžių aibės elementas).

Kartais, nurodant aibę, vartojamas koks nors vienas žodis, kuris yra žodžio „aibė“ sinonimas (žiūrovai, banda, šeima, grandis, vaisiai).

Aibės žymimos didžiosiomis lotyniškomis raidėmis arba simboliais (su skliaustais). Aibės elementas paprastai žymimas mažąja lotyniškosios arba graikiškosios abėcėlės raide arba konkrečiu ženklu (piešiniu):

$$A,\ \{\square;\ \triangle;\ \bigcirc\},\ \{\alpha;\ \beta;\ \gamma\}.$$

Elemento priklausymas kokiai nors aibei yra žymimas simboliu $\in$ (simbolis $\notin$ reiškia sąryšį „nepriklauso“).

Užrašas $\alpha \in A$ reiškia, kad elementas α priklauso aibei A, pavyzdžiui, $\triangle \in \{\square;\ \triangle;\ \bigcirc\}$. Užrašas $4 \notin \{1;\ 2;\ 3\}$ reiškia, kad elementas 4 nepriklauso aibei $\{1;\ 2;\ 3\}$.

Aibę laikysime duota (žinoma), jeigu yra išrašyti visi jos elementai arba nurodyta tokia tų elementų savybė, pagal kurią galime pasakyti, ar duotasis elementas priklauso tai aibei, ar nepriklauso[1].

Pavyzdžiui, kalbėdami apie lyginių skaičių aibę, nurodome tos aibės elementams būdingą savybę $M=\{x \in N \mid x \vdots 2\}$ (kiekvienas tos aibės skaičius dalijasi iš dviejų); užrašas $A=\{\square;\ \triangle;\ \bigcirc\}$ reiškia, kad išrašyti visi tos aibės elementai.

Paaiškinsime užrašą $M=\{x \in N \mid x \vdots 2\}$. Riestiniai skliaustai reiškia, kad yra aibė; ženklas „|“ (statmenas brūkšnys) pakeičia žodžius „tokių, kad“ (arba „tokie, kad“); ženklas „ ⋮ “ pakeičia žodį „dalijasi“; ženklas „$\in$“ apibrėžtas anksčiau; raide N žymėsime natūrinių skaičių aibę. Taigi tą užrašą reikėtų skaityti šitaip: „aibė M – tai aibė tokių natūrinių skaičių x, kurie kiekvienas dalijasi iš 2“. Galima perskaityti ir trumpiau:

[1] Tokias savybes vadinsime *charakteringosiomis savybėmis*.

„M – aibė natūrinių skaičių, kurie dalijasi iš 2“ arba „M – lyginių natūrinių skaičių aibė“.

Aibes, sudarytas iš tų pačių elementų, vadinsime *lygiomis* (sutampančiomis) ir žymėsime $A=B$.

Vadinasi, aibės A ir B yra lygios, jeigu kiekvienas aibės A elementas yra ir aibės B elementas, o kiekvienas aibės B elementas yra ir aibės A elementas.

Jeigu kiekvienas aibės B elementas yra ir aibės A elementas, tai aibę B vadinsime *aibės A poaibiu* (*dalimi*) ir žymėsime $B \subset A$.

Remiantis tuo apibrėžimu, kiekviena aibė yra savęs pačios poaibis.

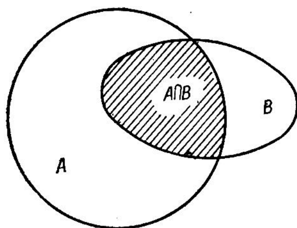
Patogumo dėlei yra nagrinėjamos ir aibės, neturinčios nė vieno elemento. Tokia aibė vadinama *tuščiąja* ir žymima simboliu $\varnothing$.

Remiantis apibrėžimu, tuščioji aibė yra kiekvienos aibės poaibis. Vadinasi, kiekviena aibė A visada turi du poaibius A ir $\varnothing$. Tuos poaibius vadinsime *netikraisiais* aibės *A poaibiais*.

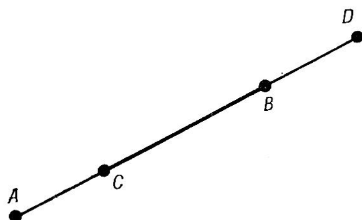
Kiekvieną aibės B poaibį A, nelygų nei $\varnothing$, nei A, vadinsime *tikruoju* aibės *A poaibiu*, arba *tikrąja* aibės *A dalimi*.

Pavyzdys. Jeigu $A=\{1;2;3\}$, tai aibės $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$ yra aibės A poaibiai, be to, tikrieji. Aibės $\varnothing$ ir $\{1;2;3\}$ yra netikrieji aibės A poaibiai.

2. Aibių sankirta. Nagrinėkime aibę natūrinių skaičių, kurie dalijasi iš 2, t.y. aibę $\{x \in N \mid x \vdots 2\}$, ir aibę natūrinių skaičių, kurie dalijasi iš 3, t.y. aibę $\{x \in N \mid x \vdots 3\}$. Nesunku pastebėti, kad aibę $\{x \in N \mid x \vdots 6\}$ skaičių, kurie dalijasi iš 6, sudaro elementai, priklausantys kiekvienai iš pirmųjų aibių.



2 pav.



3 pav.

Aibę C, sudarytą iš visų tų elementų, kurie priklauso ir aibei A, ir aibei B (2 pav.), vadinsime *aibių A* ir *B sankirta* ir žymėsime $A \cap B$ ($\cap$ – sankirtos ženklas).

Kalbant apie taškų aibes (pavyzdžiui, geometrines figūras), termino „aibių sankirta“ prasmė apskritai atitinka įprasto termino „figūrų sankirta“ prasmę. Pavyzdžiui, jei sakome, kad kuri nors kirstinė l kerta apskritimą dviejuose taškuose, tai suprantame, kad apskritimo taškų aibės ir tiesės taškų aibės sankirta yra aibė, kurią sudaro du elementai (taškai). Tačiau sankirta gali reikšti ir dalinį figūrų sutapimą. Pavyzdžiui, atkarpų AB ir CD sankirta yra atkarpa CB (3 pav.).

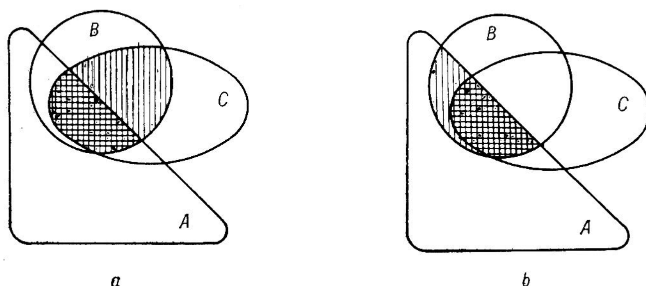
Išnagrinėsime skaičių aibių $A=\{x\in N \mid x+1=5\}$ ir $B=\{x\in N \mid x \vdots 5\}$ sankirtą. Akivaizdu, kad aibės $A=\{4\}$, $B=\{5;\ 10;\ 15;\ \ldots;\ 5n;\ \ldots\}$ bendrų elementų (skaičių) neturi, t.y. $A\cap B=\varnothing$.

Dvi aibes, kurių sankirta yra tuščioji aibė, vadinsime *nesikertančiomis aibėmis*.

Aibių kirtimosi operacija tenkina keitimo ir jungimo dėsnius:

$$A\cap B=B\cap A,\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

Tai išplaukia iš sankirtos apibrėžimo (žr. 2 ir 4 pav., *a*, *b*).



4 pav.

3. Aibių sąjunga. Praktinėje žmogaus veikloje dažnai reikia dvi arba kelias aibes *sujungti* į vieną naują aibę. Pavyzdžiui, komjaunuolių aibės – technikumo komjaunuolių grupės – sujungiamos į vieną aibę – technikumo komjaunimo organizaciją. Aibių jungimo operaciją žymėsime simboliu „$\cup$": $A\cup B=C$ (ženklas „=" reiškia, kad aibės $A\cup B$ ir C sutampa).

Dviejų aibių A ir B *sąjunga*, arba *suma*, vadinsime tokią aibę C, kurią sudaro visi aibių A ir B elementai.

Jeigu aibės A ir B turi bendrų elementų (t.y. $A\cap B\neq\varnothing$), tai kiekvienas iš jų aibėje C rašomas tik vieną kartą.

Pavyzdžiai. $[AB]\cup[CD]=[AD]$ (žr. 3 pav.),

$$\{1;\ 2;\ 3\}\cup\{4;\ 5\}=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\};$$

$$\{1;\ 2;\ 3\}\cup\{3;\ 4\}=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}.$$

Jeigu aibės A ir B nesikerta, aibėje A yra a elementų, aibėje B yra b elementų, tai aibėje C yra $a+b$ elementų.

4. Aibių skirtumas. Aibės papildinys. Jeigu turime aibes A ir B, tai aibę, sudarytą iš visų aibės A elementų, nepriklausančių aibei B, vadinsime *aibių A ir B skirtumu* ir žymėsime $A\backslash B$ (žr. 5 pav.).

Pavyzdžiai.

a) jeigu $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B=\{1;\ 2\}$, tai $A\backslash B=\{3;\ 4\}$;

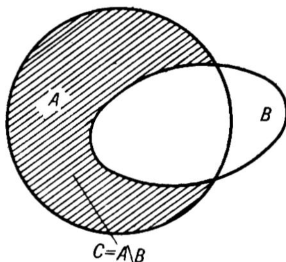
b) jeigu $A=\{1;\ 2;\ 3\}$, $B=\{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, tai $A\backslash B=\{1;\ 2\}$;

c) jeigu $A=\{1;\ 2;\ 5\}$, $B=\{3;\ 4\}$, tai $A\backslash B=\{1;\ 2;\ 5\}$;

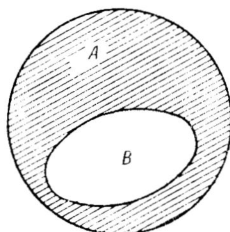
d) jeigu $A=\{1;\ 2\}$, $B=\{1;\ 2;\ 3\}$, tai $A\backslash B=\varnothing$.

Jeigu $A \supset B$, tai skirtumą $A \setminus B$ vadinsime *aibės B papildiniu* iki aibės A (6 pav.).

Pažymėsime, kad papildymo operacijos rezultatas iš esmės priklauso nuo aibės, iki kurios duotoji aibė papildoma. Pavyzdžiui, sveikųjų skaičių aibės papildinys iki racionaliųjų skaičių aibės yra visų trupmeninių skaičių aibė, sveikųjų skaičių aibės papildinys iki realiųjų skaičių aibės – visų trupmeninių ir visų iracionaliųjų skaičių aibė.



5 pav.



6 pav.

5. Tiesioginė dviejų aibių sandauga. Tarkime, kad viršutinio trikotažo fabrikas gamina vyriškus megztinius, moteriškus kostiumus, megztukus ir sukneles bordo, mėlynos, žydros, žalios, rudos ir pilkos spalvos. Gaminių aibę žymėsime A : $A = \{$vyriškas megztinis; moteriškas kostiumas; megztukas; suknelė$\}$, spalvų aibę žymėsime B : $B = \{$bordo; mėlyna; žydra; žalia; ruda; pilka$\}$.

Kokius ir kokių spalvų gaminius galime gauti? Sudarykime visų A ir B elementų poras, kuriose pirmasis būtų aibės A elementas, o antrasis – aibės B elementas. Gausime aibių A ir B elementų *sutvarkytų porų* aibę C. Štai keli aibės C elementai: (megztinis; bordo); (moteriškas kostiumas; bordo); (suknelė; žalia); (suknelė; pilka); (megztukas; pilkas). Tą aibę vadinsime *tiesiogine*[1] *dviejų duotųjų aibių sandauga.*

Taigi aibių A ir B tiesiogine sandauga vadinsime aibę, sudarytą iš visų sutvarkytų porų $(x; y)$, kuriose pirmasis komponentas yra aibės A elementas, o antrasis – aibės B elementas.

Tiesioginę aibių A ir B sandaugą žymėsime $A \times B$.

Vadinasi, pagal apibrėžimą

$$A \times B = \{ (x;\ y) \mid x \in A,\ y \in B \}.$$

Sakykime, pavyzdžiui, kad A yra sveikųjų neneigiamų skaičių aibė, o B – natūrinių skaičių aibė, t.y.

$$A = \{ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots \},\ B = \{ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots \}.$$

Užrašysime kelis aibės $A \times B$ elementus:

$$(0;\ 1),\ (0;\ 2),\ (1;\ 2),\ (1;\ 3),\ (2;\ 1),\ (2;\ 2),\ (2;\ 3)$$

ir t.t.

[1] Kartais vartojamas kitas pavadinimas – aibių Dekarto sandauga.

Pastebėsime, kad taip sudarytos poros sutampa su neneigiamų trupmenų aibės

$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{2};\ \frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{1};\ \frac{2}{2};\ \frac{2}{3};\ \ldots$$

poromis (skaitiklis; vardiklis).

Aibės A, B gali ir sutapti. Išnagrinėsime pavyzdį.

Fabrikas „Avtoručka" atskirai gamina plunksnakočių korpusus ir antgalius baltos, raudonos, žalios ir oranžinės spalvos. Pažymėkime A plunksnakočio korpuso spalvų aibę, o B – antgalio spalvų aibę. Tada $A=B=$ {balta; raudona; žalia; oranžinė}. Derinant korpuso ir antgalio spalvas, galima gauti įvairiausių spalvų derinių plunksnakočius. Jungdami visais galimais būdais aibės A spalvas su aibės B spalvomis, gausime tiesioginę sandaugą, kurią vadinsime *tiesioginiu*, arba *Dekarto*, *kvadratu* ir žymėsime $A\times A=A^2$.

Iš to pavyzdžio išplaukia, kad kiekviena tiesioginės sandaugos pora yra sutvarkyta: automatinis plunksnakotis, kurio korpusas raudonas, o antgalis baltas, skiriasi nuo automatinio plunksnakočio, kurio korpusas baltas, o antgalis raudonas.

Tiesioginę aibių sandaugą dažnai patogu apibrėžti „geometrine kalba". Tada aibės $A\times B$ elementus vadiname *taškais*. Pavyzdžiui, jeigu $Z=(x; y)$, tai $x\in A$ vadiname taško Z *abscise*, o $y\in B$ – to taško *ordinate*. Šių terminų prasmė paaiškėja, pastebėjus, kad plokštumos taškų aibė iš esmės yra tiesioginė sandauga $R\times R$; čia R – realiųjų skaičių aibė.

Baigdami nagrinėti aibių operacijas pateiksime pavyzdį.

Pavyzdys. Jeigu $A=\{2; 5; 7; 9\}$, $B=\{2; 4; 7\}$, tai

$$A\cap B=\{2;\ 7\},$$

$$A\cup B=\{2;\ 4;\ 5;\ 7;\ 9\},$$

$$A\backslash B=\{5;\ 9\},$$

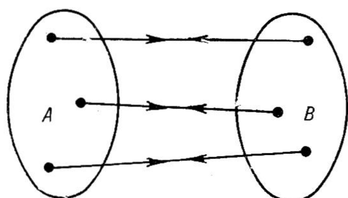
$$A\times B=\{(2;\ 2);\ (2;\ 4);\ (2;\ 7);\ (5;\ 2);\ (5;\ 4);\ (5;\ 7);\ (7;\ 2);\ (7;\ 4);\ (7;\ 7);$$
$$(9;\ 2);\ (9;\ 4);\ (9;\ 7)\}.$$

6. Ekvivalenčios aibės. Aibės gali būti sudarytos iš įvairiausių rūšių elementų, todėl jos gali turėti įvairiausias savybes. Vienas aibes galime visaip lyginti su kitomis, atsižvelgdami į tai, kurios jų savybės mus domina. Pavyzdžiui, geometrinių figūrų aibes galima palyginti pagal jų elementų formą (trikampiai, kvadratai), gėlių aibes – pagal jų spalvą (raudonos, baltos).

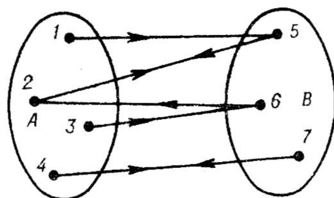
Iš įvairių aibių savybių ypač svarbi savybė „turi tiek pat elementų". Tą savybę galima nustatyti ypatingu veiksmu – vienos aibės atvaizdavimu į kitą, arba jų elementų porine atitiktimi. Sakysime, kad tarp aibių A ir B yra *abipus vienareikšmė atitiktis*, jeigu kiekvieną aibės A elementą atitinka (su juo suporuotas) vienintelis aibės B elementas, ir atvirkščiai, kiekvieną aibės B elementą atitinka vienintelis aibės A elementas. Vadinasi, skirtingus vienos aibės elementus atitinka skirtingi kitos aibės elementai (7 pav.).

Pastebėsime, kad to apibrėžimo pabaiga yra esminė, nes, ją praleidus, atitiktis gali nebūti abipus vienareikšmė (žr. 8 pav.).

Aibes, tarp kurių galima nustatyti abipus vienareikšmę atitiktį, vadinsime *tos pačios galios*, arba *ekvivalenčiomis*. Jeigu aibės A ir B yra ekvivalenčios, tai rašysime $A \sim B$. Jeigu $A \sim B$ ir $B \sim C$, tai akivaizdu, kad $A \sim C$.



7 pav.



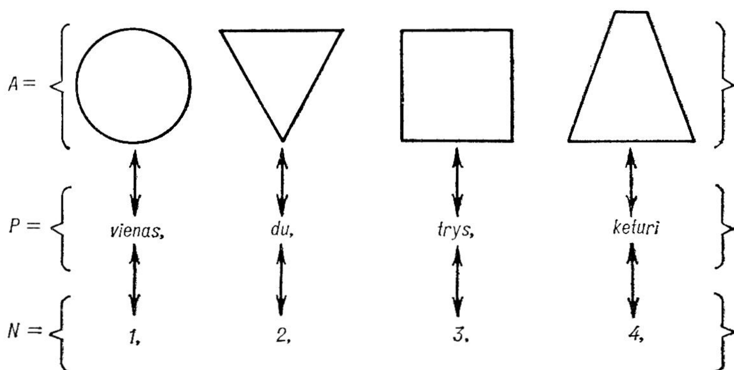
8 pav.

Jeigu egzistuoja toks natūrinis skaičius n, kad aibė A yra ekvivalenti aibei $\{1; 2; ...; n\}$, tai aibę A vadinsime *baigtine*. Tuomet sakoma, kad aibėje A yra n elementų.

Ar dvi baigtinės aibės yra tos pačios galios, galima sužinoti, 1) betarpiškai nustatant abipus vienareikšmę jų elementų atitiktį; 2) suskaičiuojant aibių elementus ir palyginant gautuosius skaičius.

Nors pirmasis būdas dažnai taikomas praktikoje (pavyzdžiui, kontrolieriaus, tikrinančio bilietus, darbe), antrasis būdas yra efektyvesnis, nes juo išaiškinama ne tik tai, ar aibės yra tos pačios galios, bet ir kiek elementų turi kiekviena aibė.

Apskritai skaičiavimas yra taip pat abipus vienareikšmės atitikties tarp duotosios aibės ir natūrinių skaičių aibės dalies nustatymas (9 pav.)



9 pav.

Be to, skaičiuodami nustatome tam tikrų elementų išsidėstymo aibėje A tvarką (pavyzdžiui, trikampis yra antrasis elementas, o trapecija – ketvirtasis). Vadinasi, natūriniai skaičiai nurodo ne tik kokios nors aibės elementų skaičių, bet ir tų elementų išsidėstymo eilę.

Apskritai baigtinę aibę, sudarytą iš n elementų, vadiname *sutvarkyta*, jeigu jos elementai kokiu nors būdu sunumeruoti natūriniais skaičiais 1, 2, ..., n.

Pavyzdžiui, klasės (grupės) mokinių aibė yra sutvarkyta: ties kiekvieno mokinio pavarde žurnale yra natūrinis skaičius (pirmas sąraše, antras ir t.t.).

Šis natūrinių skaičių dvilypumas atsispindi ir jų pavadinimuose: vienas – pirmas, du – antras ir t.t.

Pažymėsime, kad aibės elementų skaičiavimo tvarka neturi įtakos skaičiavimo rezultatui, svarbu tik nepraleisti kurio nors elemento arba jo neskaičiuoti du kartus.

Jeigu $A=B$, tai akivaizdu, kad $A\sim B$. Tačiau atvirkštinis teiginys nėra teisingas – tos pačios galios aibės gali ir nesutapti. Pavyzdžiui, jeigu $A=\{3;4;5;6;7;8;9\}$, $B=\{$savaitės dienų aibė$\}$, tai $A\sim B$, bet $A\neq B$.

Pratimai

1. Imkite du taškus A ir B, išveskite du tokius spindulius $[AX)$ ir $[BY)$, kad $B\in[AX)$, $A\in[BY)$. Kiek skirtingų spindulių, atkarpų ir tiesių yra brėžinyje?

2. Kokia figūra yra sąjunga spindulių (žr. 1 prat.):

a) $[AX)$ ir $[AY)$; b) $[BX)$ ir $[BY)$; c) $[BX)$ ir $[AY)$; d) $[AX)$ ir $[BY)$; e) $[AY)$ ir $[BY)$; f) $[BX)$ ir $[AX)$? Nubraižykite tą figūrą.

3. Kokia figūra yra spindulių, pateiktų 2 pratime, sankirta? Nubraižykite ją.

4. Kokia figūra yra sąjunga (žr. 1 prat.):

a) spindulio AY ir atkarpos AB;
b) spindulio BX ir atkarpos AB;
c) spindulio AX ir tiesės XY;
d) spindulio AY ir tiesės XY;
e) atkarpos AB ir tiesės XY?

5. Nubraižykite tas figūras. Kokia figūra yra atitinkamų figūrų iš 4 pratimo sankirta? Nubraižykite ją.

6. Sakykime,

$$A=\{-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\},$$

$$B=\{4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0;\ -1;\ -2\},$$

$$C=\{-4;\ -3;\ \ldots;\ 3;\ 4\}.$$

Raskite aibes $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cup C$, $A\cap C$, $B\cup C$.

7. Sakykime, N yra natūrinių skaičių aibė, Z – sveikųjų skaičių aibė, o aibės A, B ir C apibrėžtos 6 pratime. Raskite

$$A\cap N,\ B\cap Z,\ A\cup N,\ B\cup Z,\ N\cap Z,\ (A\cap B)\cap N.$$

8. Sakykime, M yra reiškinio $3{,}5-9a$ reikšmių aibė, kai $a=-1;\ 0{,}35$. Raskite visus M poaibius.

9. Perskaitykite šiuos užrašus:

$$\alpha\in A,\ \alpha\notin A,\ C\subset D,\ C\subseteq D,$$

$$\varnothing\subset A,\ F\supset E,\ A\sim B,\ A=B,$$

$$A\cup B=C,\ A\cap B=D,\ A\backslash B=E,\ A\times B=L.$$

Pateikite po pavyzdį, iliustruojantį kiekvieną užrašą.

10. Sakykime, N yra natūrinių skaičių aibė, Z – sveikųjų skaičių aibė, P – racionaliųjų skaičių aibė, R – realiųjų skaičių aibė, K – plokštumos taškų aibė. Raskite tų aibių sąryšius.

11. Perskaitykite užrašus:

$$M=\{x\in P \mid 2x=3\},\ F=\{x\in N \mid x \vdots 3\},$$

$$E=\{x\in N \mid x-3<5\}.$$

Kiekvieną aibę (išskyrus F) užrašykite, išrašydami visus jos elementus. Kodėl taip negalima užrašyti aibės F? Parašykite pirmuosius keturis aibės F elementus.

12. Sakykime, plokštumoje K duoti du taškai A ir B. Nubraižykite figūrą

$$F=\{M\in K \mid |MA|=|MB|\}.$$

13. Sakykime, plokštumoje duoti trys taškai A, B ir C, nepriklausantys vienai tiesei. Nubraižykite figūrą

$$F=\{M\in K \mid |MA|=|MB|=|MC|\}.$$

14. Sakykime, duoti trys taškai A, B, C, nepriklausantys vienai tiesei. Nubraižykite figūrą

$$F=\{M\in K \mid \widehat{BAM}=\widehat{CAM}\}.$$

15. Sakykime, F_1 yra visų galimų lygiagretainių aibė, F_2 – stačiakampių, F_3 – rombų, F_4 – kvadratų, F_5 – trapecijų aibė. Užrašykite rezultatus šių operacijų:

a) $F_2\cap F_3$; b) $F_2\cup F_3\cup F_4\cup F_1$; c) $F_4\cap F_5$.

16. Duotos šios aibės:
a) lygties $x^2-9=0$ sveikųjų šaknų aibė;
b) lygties $x^2+9=0$ sveikųjų šaknų aibė;
c) lygties $\frac{1}{x}=0$ realiųjų šaknų aibė;
d) natūrinių skaičių, mažesnių kaip 1, aibė;
e) natūrinių skaičių, kurie nėra nei pirminiai, nei sudėtiniai, aibė.
Kurios iš jų yra tuščiosios?

17. Sakykime,

$$A=\{7;\ 8;\ 9\},\ B=\{8;\ 9\}.$$

Raskite $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $A\times B$. Tas pačias operacijas atlikite ir su aibėmis $A_1=\{1;\ 2\}$, $B_1=\{1;\ 2\}$, taip pat su $A_2=\{1;\ 2\}$ ir $B_2=\{3;\ 4\}$.

18. Į skritulį įbrėžtas kvadratas. Pažymėkime A to skritulio taškų aibę, B – kvadrato taškų aibę. Raskite $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

19. Iš 40 technikumo moksleivių 32 prenumeruoja laikraštį „Komjaunimo tiesa“, 21 – žurnalą „Moksleivis“, 15 prenumeruoja ir laikraštį, ir žurnalą. Kiek mokinių neprenumeruoja nei laikraščio, nei žurnalo?

§ 6. MATEMATINĖS LOGIKOS PAGRINDINĖS SĄVOKOS

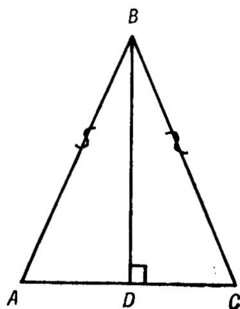
1. Teiginio sąvoka. Kiekvieną mintį išreiškiame žodžiais, sujungtais į sakinį. Įvairiais sakiniais pasakome įvairiausias mintis. Sakydami, pavyzdžiui, kad ši diena yra išeiginė, išreiškiame tam tikrą samprotavimą. Tokie yra ir sakiniai „3 yra pirminis skaičius“ arba „4 yra nelyginis skaičius“. Pirmasis sakinys yra teisingas, o antrasis – klaidingas. Sakinius, apie kuriuos galima pasakyti, kad jie teisingi arba klaidingi, vadinsime *teiginiais*.

Sakiniai „Išspręskite uždavinį“, „Sveiki“ nėra teiginiai (nes negalima pasakyti, ar jie teisingi, ar klaidingi). Matematinis sakinys $50 \cdot 4+2$ taip pat nėra teiginys, bet lygybė $43-2=39$ jau yra teiginys. Pastebėsime, kad kiekvienas teiginys yra arba teisingas, arba klaidingas – jis negali būti tuo pačiu metu ir toks, ir anoks. Yra nemažai ir tokių sakinių, kuriais kažkas teigiama arba neigiama, bet negalima pasakyti, ar jie teisingi, ar klaidingi. Tokie, pavyzdžiui, yra sakiniai:

$$2x+5=70, \quad x<12, \quad a\neq 0.$$

Tačiau kiekvienas toks sakinys bus teiginys, jeigu nežinomąjį (kintamąjį) narį pakeisime konkrečiu skaičiumi. Tuos sakinius vadinsime *teiginių formomis*, arba *predikatais*.

Pavyzdžiui, lygtis $x+2=5$ yra teiginio forma; jeigu vietoj x įrašysime konkretų skaičių, tai ji jau bus teiginys (teisingas arba klaidingas).



10 pav.

Išnagrinėsime dar vieną pavyzdį (10 pav.). Suformuluosime žinomą teoremą: „jeigu duotajame ΔABC $[AB]\cong[BC]$ ir $[BD]\perp[AC]$, tai $[AD]\cong$ $\cong[DC]$ ir $<ABD\cong<DBC$“. Tą sudėtinį teiginį galime suskaidyti į keturis paprastesnius:

1) $[AB]\cong[BC]$;

2) $[BD]\perp[AC]$;

3) $[AD]\cong[DC]$;

4) $\angle ABD\cong\angle DBC$.

Kiekvienas iš tų keturių sakinių yra paprastasis teiginys. Teiginį vadinsime *paprastuoju*, jeigu nė viena jo dalis pati nėra teiginys. Jeigu toji sąlyga nėra išpildyta, tai teiginį vadinsime *sudėtiniu*.

Todėl „Duotajame ΔABC $[AB]\cong[BC]$“ yra paprastasis teiginys, o teiginys „Jeigu duotajame ΔABC $[AB]\cong[BC]$, tai kampai prie jo pagrindo yra kongruentūs“ – sudėtinis teiginys, sudarytas iš dviejų paprastųjų.

Kiekvieną paprastąjį teiginį žymėsime raidėmis p, q, h arba t.

2. Loginės operacijos. Neiginys. Paanalizuokime teoremų formuluotes.

1) Jeigu duotasis keturkampis yra lygiagretainis, tai priešingos jo kraštinės poromis kongruenčios.

2) Jeigu duotasis natūrinis skaičius dalijasi iš 6, tai jis dalijasi iš 2 ir iš 3.

3) Jeigu duotasis natūrinis skaičius nesidalija iš 3, tai dalybos liekana yra lygi 1 arba 2.

Nesunku įsitikinti, kad kiekviena čia suformuluota teorema yra sudėtinis teiginys, sudarytas iš paprastųjų, vartojant ypatingus žodžius „ir", „arba", „jeigu ..., tai ...", „ne".

Tuos kasdieninės kalbos žodžius vadinsime *loginiais jungtukais* ir sakysime, kad čia su paprastaisiais teiginiais yra atliktos *elementariosios loginės operacijos*. Aišku, sudėtiniai teiginiai, gauti iš paprastųjų elementariomis loginėmis operacijomis, bus arba teisingi, arba klaidingi priklausomai nuo to, teisingi ar klaidingi juos sudarantys teiginiai.

Paprasčiausia atliekama su teiginiais loginė operacija yra *neigimas*, atitinkantis kasdieninės kalbos dalelytę „ne".

Kalbėdami dažnai vartojame dalelytę „ne", ką nors neigdami. Pavyzdžiui, teiginio „Taškas A priklauso tiesei a" neiginys bus „Taškas A nepriklauso tiesei a".

Teiginio p neigimo operacija žymima simboliu $\bar{p}$ ir skaitoma „ne p".

Nustatysime ryšį tarp teiginio ir jo neiginio teisingumo reikšmių. Pažymėkime P teiginį „6 — lyginis skaičius". Tada $\bar{p}$ bus teiginys „6 — nelyginis skaičius". Taigi p yra teisingas, o $\bar{p}$ — klaidingas.

Jeigu p yra teiginys „1/2 — sveikasis skaičius", tai aišku, kad p — klaidingas teiginys, o teiginys $\bar{p}$ „1/2 nėra sveikasis skaičius" — teisingas.

Vadinasi, galime padaryti šitokią išvadą: jeigu pradinis teiginys yra teisingas, tai jo neiginys — klaidingas; jeigu pradinis teiginys yra klaidingas, tai jo neiginys — teisingas. Tą išvadą užrašysime lentele:

p	$\bar{p}$
t	k
k	t

arba

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

Skaitmenimis 1 ir 0 pažymėjome atitinkamai teisingą ir klaidingą teiginius.

Tokia lentelė yra vadinama teiginio *reikšmių lentele*. Ji vaizdžiai iliustruoja teiginio neiginio apibrėžimą.

Duotojo teiginio p neiginiu yra vadinamas teiginys, kuris yra teisingas, jeigu duotasis teiginys — klaidingas, ir yra klaidingas, jeigu duotasis teiginys — teisingas.

3. Teiginių konjunkcija. Sudėtinį teiginį galima sudaryti iš paprastųjų, naudojantis jungtuku „ir".

Pavyzdys. Teiginys „Priešingos kiekvieno stačiakampio kraštinės yra tarpusavyje kongruenčios ir lygiagrečios" sudarytas iš dviejų paprastųjų teiginių:

p (priešingos kiekvieno stačiakampio kraštinės yra tarpusavyje kongruenčios);

q (priešingos kiekvieno stačiakampio kraštinės yra tarpusavyje lygiagrečios).

Jungtukas „ir" rodo loginę operaciją, vadinamą *konjunkcija*[1].

Sakykime, turime du teiginius p ir q. Teiginys, kuris yra teisingas tada ir tik tada, kai abu tie teiginiai teisingi, vadinamas *teiginių p ir q konjunkcija* ir žymimas $p \wedge q$ (skaitoma „p ir q").

Tas apibrėžimas nesunkiai apibendrinamas ir keliems teiginiams.

Remdamiesi apibrėžimu, sudarome dviejų teiginių konjunkcijos reikšmių lentelę

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

4. Teiginių disjunkcija. Panagrinėkime teiginį „Duotasis trikampis yra arba status, arba lygiašonis". Jis yra teisingas, jeigu trikampis yra arba status, arba lygiašonis, arba status ir lygiašonis. Sakoma, kad šiuo atveju turime paprastąjį „arba", arba *disjunkciją*[2].

Sakykime, turime du teiginius p ir q. Teiginys, kuris yra teisingas tada ir tik tada, kai teisingas bent vienas iš tų teiginių, vadinamas *teiginių p ir q disjunkcija* ir žymimas $p \vee q$ (skaitoma „p arba q").

Tą apibrėžimą nesunkiai galima apibendrinti keliems teiginiams.

Jeigu, pavyzdžiui, teiginys p yra „15 daugiau kaip 9" ir teiginys q yra „2 daugiau kaip 9", tai teiginys $p \vee q$ (15 daugiau kaip 9 arba 2 daugiau kaip 9) yra teisingas.

Remdamiesi apibrėžimu, galime sudaryti disjunkcijos reikšmių lentelę

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

[1] Iš lotyniško žodžio „conjunctio" — sujungimas, surišimas.
[2] Iš lotyniško žodžio „disjunctio" — atskyrimas, išskyrimas.

Duoti du teiginiai: $7<10$ ir $7=10$. Tų teiginių disjunkcija $(7<10)\vee\vee(7=10)$ algebros kurse yra užrašoma nelygybe $7\leqslant 10$. Žinome, kad ta nelygybė yra teisinga, taigi disjunkcija $(7<10)\vee(7=10)$ taip pat teisinga.

5. Teiginių implikacija ir ekvivalentumas. Du teiginiai gali būti „sujungti" jungtuku „jeigu ..., tai ...". Teiginys nuo žodžio „jeigu" iki žodžio „tai" yra vadinamas *sąlyga* (*hipoteze* arba *prielaida*), o teiginys už žodžio „tai" – *išvada*. Vaizdžiai tariant, hipotezė – tai „pamatas, ant kurio yra statomas išvados pastatas".

Pavyzdžiai. 1) Jeigu lyja, tai ta gėlių lysvė palaistyta.

2) Jeigu $x_0=2$, tai $x_0^2-3x_0+2=0$.

3) Kiekvienas statmens, iškelto iš atkarpos vidurio, taškas yra vienodai nutolęs nuo atkarpos galų.

Jungtukas „jeigu ..., tai ..." atitinka loginę operaciją, vadinamą *implikacija*[1].

Dviejų teiginių p ir q implikacija vadinamas teiginys $p\Rightarrow q$ (skaitoma „iš p išplaukia q" arba „p implikuoja q"), kuris yra klaidingas tada ir tik tada, kaip p yra teisingas, o q – klaidingas.

Remdamiesi implikacijos apibrėžimu, sudarome jos reikšmių lentelę

p	q	$p\Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Išnagrinėkime tą lentelę, vadovaudamiesi „sveiku protu".

Teiginys „Jeigu traukinys įvažiuoja į stotį, tai užsidega raudonas signalas (kelias užimtas)" yra implikacija šių dviejų teiginių:

p: traukinys įvažiuoja į stotį,

q: užsidega raudonas signalas (kelias užimtas).

Yra galimos keturios teiginių p ir q reikšmės. Kiekvienu atveju nustatykime teiginio $p\Rightarrow q$ reikšmę.

Teiginys $p\Rightarrow q$ yra teisingas, jeigu

a) traukinys įvažiuoja ir užsidega raudonas signalas (1; 1; 1);

b) traukinys neįvažiuoja ir užsidega žalias signalas (0; 0; 1);

c) traukinys neįvažiuoja ir užsidega raudonas signalas (0; 1; 1).

Teiginys nieko nesako, koks signalas (raudonas ar žalias) turi būti, jeigu traukinys neatvyksta; vadinasi, jis gali būti bet koks. Teiginys yra klaidingas tik tuo atveju, kai

d) traukinys įvažiuoja ir užsidega žalias signalas (1; 0; 0).

Dažnai įvairūs tvirtinimai sudaromi, vartojant jungtukus „tie ir tik tie", „tada ir tik tada". Sudėtinis teiginys, sudarytas iš dviejų (arba kelių) teiginių, sujungtų tais jungtukais, yra vadinamas *teiginių ekvivalentumu*[2] (arba *dviguba implikacija*) ir žymimas $p\Leftrightarrow q$. Natūralu jį apibrėžti šitaip.

[1] Iš lotyniško žodžio „implicio" – tampriai surišu.

[2] Iš lotyniško žodžio „aequivalens" – lygiavertis, lygiareikšmis.

Teiginių p ir *q ekvivalentumu* vadinamas teiginys $p \Leftrightarrow q$, kuris yra teisingas tada ir tik tada, kai abu teiginiai p ir q kartu yra teisingi arba klaidingi.

Loginio ekvivalentumo reikšmių lentelė yra šitokia:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
0	0	1
1	0	0
0	1	0

6. Paprasčiausi teiginių logikos taikymo pavyzdžiai. Išnagrinėsime uždavinį.

Trys broliai (Ivanas, Dmitrijus ir Sergejus) dėsto skirtingas disciplinas (chemiją, biologiją, istoriją) Maskvos, Leningrado ir Kijevo universitetuose.

1) Ivanas nedirba Maskvoje, o Dmitrijus nedirba Leningrade.
2) Maskvietis nedėsto istorijos.
3) Dirbantis Leningrade dėsto chemiją.
4) Dmitrijus nedėsto biologijos.

Ką ir kokiame mieste dėsto Sergejus?

Sprendžiant uždavinį, būtų tikslinga sudaryti šitokią lentelę.

Maskva	Leningradas	Kijevas		Chemija	Biologija	Istorija
0			Ivanas			
			Sergejus			
	0		Dmitrijus		0	

Toliau samprotaujame šitaip:

Dmitrijus nedėsto Leningrade (pirmas teiginys) taigi, remiantis trečiu teiginiu, jis nedėsto chemijos, o, remiantis ketvirtu, nedėsto biologijos. Vadinasi, Dmitrijus dėsto istoriją.

Iš antro teiginio išplaukia, kad Dmitrijus nėra maskvietis. Taigi Dmitrijus gyvena Kijeve.

Maskva	Leningradas	Kijevas		Chemija	Biologija	Istorija
0	1	0	Ivanas	1	0	0
1	0	0	Sergejus	0	1	0
0	0	1	Dmitrijus	0	0	1

Užpildę lentelę, matome, kad Sergejus gyvena Maskvoje ir dėsto biologiją.

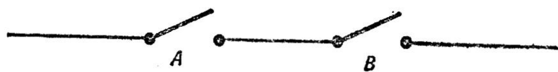
Išnagrinėsime dar vieną pavyzdį.

Teiginiai ir elektros grandinės kontaktai turi tam tikrų panašių savybių, todėl teiginių algebra pritaikoma kontaktinių schemų analizės ir sintezės uždaviniuose.

Koks gi tai panašumas? Teiginiai gali įgyti tik dvi reikšmes: 1 ir 0, kontaktai gali būti tik dviejose padėtyse („sujungta" ir „atjungta").

Schemos sinteze laikysime schemos sudarymą, remiantis duotomis darbo sąlygomis, o schemos analize – atvirkštinį uždavinį: duotosios schemos darbo sąlygų nustatymą.

Be šių uždavinių, tenka spręsti ir kitokius, pavyzdžiui, schemą supaprastinti, t.y. sudaryti schemą, ekvivalentišką duotajai, bet turinčią mažiau

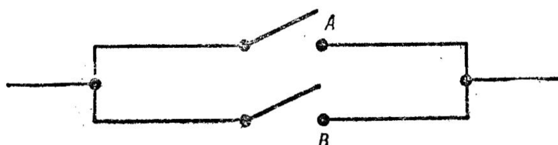


11 pav.

kontaktų. Tačiau daugumai tokių uždavinių spręsti reikia gilesnių matematinės logikos žinių, todėl čia nagrinėsime tik paprasčiausius pavyzdžius.

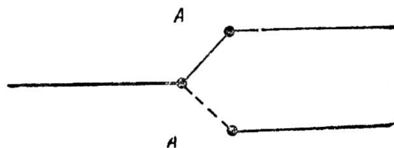
Sakykime, teiginiai *A*, *B*, *C* reiškia elektros schemos kontaktus ir įgyja reikšmę 1, kai kontaktai sujungti, ir reikšmę 0, kai kontaktai atjungti. Tada galime pasakyti štai ką.

1) Dviejų teiginių konjunkciją atitinka dviejų kontaktų schema, kuri yra sujungta tada ir tik tada, kai sujungti abu kontaktai (11 pav.).



12 pav.

2) Teiginių disjunkciją atitinka dviejų kontaktų schema, kuri yra sujungta tada ir tik tada, kai sujungtas bent vienas kontaktas, ir atjungta tada ir tik tada, kai atjungti abu kontaktai (12 pav.).



13 pav.

3) Teiginio *A* neiginį atitinka schema, kuri yra sujungta, kai kontaktas *A* atjungtas, ir atjungta, kai *A* sujungtas (13 pav.).

Akivaizdu, kad tokia atitiktis yra abipus vienareikšmė, t.y. kiekvieną teiginių logikos formulę, sudarytą, panaudojus minėtąsias operacijas, atitinka viena ir tik viena schema, ir atvirkščiai – kiekvieną tokią schemą galima aprašyti viena ir tik viena formule.

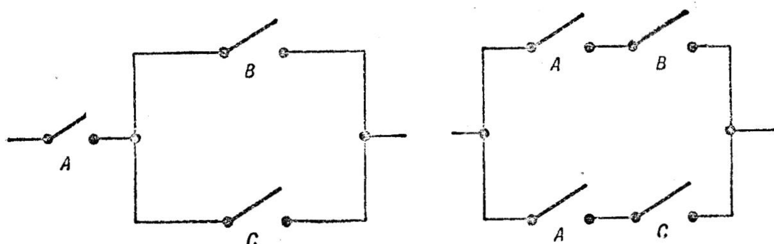
Šia atitiktimi formulėms priskiriame ekvivalenčias schemas ir atvirkščiai.

Išnagrinėkime, pavyzdžiui, ekvivalenčias viena kitai formules

$$A \wedge (B \vee C), \qquad (*)$$

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C). \qquad (**)$$

(Jų ekvivalentumu įsitikinkite, remdamiesi reikšmių lentelėmis.) Jas atitinka ekvivalenčios schemos (14 pav.).



14 pav.

7. Predikato sąvoka. Kartu su teiginiais matematikoje ir kituose moksluose susiduriame su tokiais posakiais, kurie savo gramatine forma yra panašūs į teiginius, bet turi vadinamuosius daiktinius kintamuosius (argumentus). Pavyzdžiui, sakinys „x – pirminis skaičius" nėra teiginys, bet, vietoj simbolio x įrašius konkrečią reikšmę – daiktinę konstantą, jau bus teiginys. Anksčiau kalbėjome, kad tokie posakiai, kaip „x – pirminis skaičius" yra vadinami teiginių formomis (arba predikatais). *Predikatu* vadinsime šitokio tipo tvirtinimą: „elementas x, priklausantis aibei U, pasižymi savybe $p(x)$".

Atsižvelgiant į daiktinių kintamųjų skaičių, predikatai yra skirstomi į vienviečius, dviviečius, ..., n-viečius.

Pavyzdžiui, $x=3$ yra vienvietis predikatas, apibrėžtas realiųjų skaičių aibėje, $x^2 \leqslant y$ – dvivietis predikatas, apibrėžtas toje pačioje aibėje.

Kaip ir teiginių logikoje, predikatai yra skirstomi į tapačiai teisingus ir tapačiai klaidingus (jų apibrėžimai aiškūs iš pačių pavadinimų).

Predikatas $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ yra tapačiai teisingas realiųjų skaičių aibėje, predikatas $x+1=x$ – tapačiai klaidingas toje pačioje aibėje.

Kaip žinome, aibę galima apibrėžti, nurodant požymį, kuris apibūdina visus tos aibės elementus ir tik juos. Taip, pavyzdžiui, yra apibrėžiamos aibės realiųjų skaičių, priklausančių kuriam nors skaičių tiesės intervalui: $M=\{x \mid 5<x<7\}$; skritulys (aibė plokštumos taškų, apribotų apskritimu, įskaitant ir to apskritimo taškus); berniukų, mokyklos matematikų būrelio narių, aibė ir t.t. Nesunku pastebėti, kad, taip apibrėždami (apra-

šydami) aibes, formuluojame tam tikrus tvirtinimus (predikatus) apie kokios nors aibės U, vadinamos universalia (visų realiųjų skaičių aibės, plokštumos taškų aibės, berniukų – mokyklos mokinių – aibės ir t.t.) elementus, po to išrenkame tuos ir tik tuos aibės U elementus, kurie tenkina iškeltąjį reikalavimą (kad jis būtų teisingas teiginys). Taigi kiekvieną predikatą atitinka kuris nors aibės U poaibis, kurio elementams tas teiginys yra teisingas:

$$M=\{x\in U \mid P(x)=1\};$$

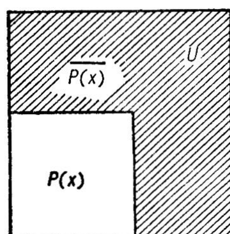
tas poaibis yra vadinamas *predikato teisingumo aibe*. Suprantama, duotojo predikato teisingumo aibė gali būti tuščia (kai predikatas yra tapačiai klaidingas) ir gali sutapti su aibe U (kai predikatas yra tapačiai teisingas).

Du predikatai yra vadinami *ekvivalenčiais*, jeigu jie yra apibrėžti toje pačioje aibėje U ir jų teisingumo aibės (M_1 ir M_2) sutampa.

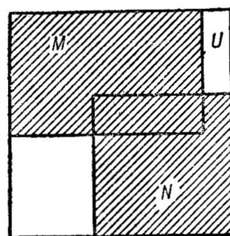
Pavyzdžiui, predikatai $3x-6=0$ ir $3x=6$ yra ekvivalentūs, nes $M_1=\{2\}$, $M_2=\{2\}$ ir abu predikatai apibrėžti toje pačioje aibėje U (realiųjų skaičių aibėje).

Predikatai $3x-6=0$ ir $x^2-5x+6=0$ nėra ekvivalentūs, nes $M_1=\{2\}$, $M_2=\{2;\ 3\}$, taigi $M_1\neq M_2$.

8. Loginės predikatų operacijos. Paprasčiausios loginės predikatų (kaip ir teiginių) operacijos yra neigimo, konjunkcijos, disjunkcijos, implikacijos ir ekvivalentumo; jos žymimos jau žinomais simboliais. Atliekant



15 pav.



16 pav.

tas operacijas, į predikatų turinį nekreipiama dėmesio ir žiūrima tik jų reikšmių (t.y. ekvivalentūs predikatai neskiriami). Predikatų loginių operacijų apibrėžimai yra analogiški teiginių atitinkamų operacijų apibrėžimams. Pavyzdžiui, predikato $P(x)$, apibrėžto aibėje U, neiginiu yra vadinamas predikatas $\overline{P(x)}$, apibrėžtas toje pačioje aibėje ir įgyjantis reikšmę 1 (teisingas) su tais ir tik tais x, su kuriais predikatas $P(x)$ įgyja reikšmę 0 (klaidingas).

Predikato $\overline{P(x)}$ teisingumo aibė yra predikato $P(x)$ teisingumo aibės papildinys iki aibės U (15 pav.). Ta savybė gali būti predikato neiginio apibrėžimas. Pavyzdžiui, predikato $x>2$, apibrėžto realiųjų skaičių aibėje, neiginys bus predikatas $x\leqslant 2$, apibrėžtas toje pačioje aibėje. Skaičius $\sqrt{3}$ predikato $x\leqslant 2$ netenkina, o jo neiginį tenkina.

Matematikoje dažnai vartojamas predikato neiginys. Pavyzdžiui, spręsdami uždavinį „Raskite funkcijos $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$ apibrėžimo sritį“,

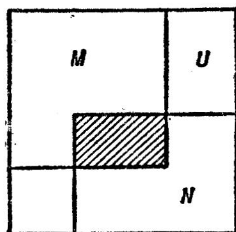
sprendžiame lygtį $x^2-5x+6=0$, bet ne nelygybę $x^2-5x+6\neq 0$. Išsprendę tą lygtį, gauname $x=2$ ir $x=3$, po to imame neiginį $x\neq 2$ ir $x\neq 3$.

Analogiškai apibrėžiamos ir kitos loginės predikatų operacijos. Jų prasmė yra tokia pat, kaip ir teiginių logikoje. Tiesa, čia arba visai negalima sudaryti reikšmių lentelių (kai predikatų apibrėžimo sritys yra begalinės aibės), arba tos lentelės būna labai gremėzdiškos. Pateiksime tik kelias pastabas apie tų operacijų interpretavimą aibių kalba ir kelis iliustruotus pavyzdžius iš mokyklinio matematikos kurso.

Pažymėkime M predikato $P(x)$ teisingumo aibę, o N – predikato $Q(x)$ teisingumo aibę. Tada disjunkcijos $P(x)\vee Q(x)$ teisingumo aibė bus $M\cup N$ (16 pav.). Dviejų predikatų disjunkcijos pavyzdį turėtume, išsprendę nelygybę $x^2-8x+15>0$. Jos sprendiniai: $x>5$ arba $x<3$, taigi galutinis nelygybės sprendinys – disjunkcija $(x<3)\vee(x>5)$ (17 pav.). Iš to pavyzdžio išplaukia, kad predikato disjunkcija atitinka aibių jungimo operaciją.



17 pav.



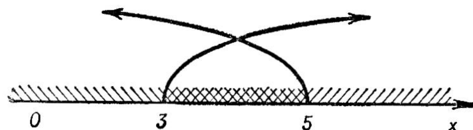
18 pav.

Tame pavyzdyje

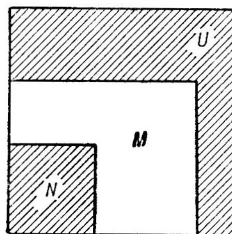
$$M=\{x\in R\mid(x<3)\vee(x>5)\}$$

yra aibių $A=\{x\in R\mid x<3\}$ ir $B=\{x\in R\mid x>5\}$ sąjunga.

Dviejų predikatų konjunkciją $P(x)\wedge Q(x)$ atitinka teisingumo aibė $M\cap N$ (18 pav.).



19 pav.

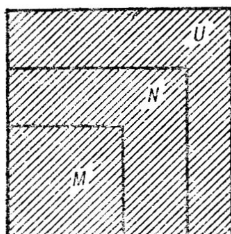


20 pav.

Dviejų predikatų konjunkcijos pavyzdį turėsime, išsprendę nelygybę $x^2-8x+15<0$. Tos nelygybės sprendiniai: $x>3$ ir $x<5$. Taigi galutinis nelygybės sprendinys – konjunkcija $(x>3)\wedge(x<5)$. Iš to pavyzdžio išplaukia, kad dviejų predikatų konjunkciją atitinka aibių sankirtos operacija. Šiuo atveju $M=\{x\in R\mid 3<x<5\}$ yra aibių $A=\{x\in R\mid x>3\}$ ir $B=\{x\in R\mid x<5\}$ sankirta (19 pav.).

Dviejų predikatų implikaciją $P(x) \Rightarrow Q(x)$ atitinka teisingumo aibė $(U \setminus M \setminus N)$ (20 pav.).

Jeigu implikacijos $P(x) \Rightarrow Q(x)$ teisingumo aibės M ir N yra tokios, kad $M \subset N$ (21 pav.), tai sakoma, kad $Q(x)$ *logiškai išplaukia* iš $P(x)$, arba kad tarp $P(x)$ ir $Q(x)$ yra implikacijos sąryšis.



21 pav.

21 paveiksle matome, kad implikacija yra tapačiai teisingas predikatas (jo teisingumo aibė yra U).

Išnagrinėsime kelis pavyzdžius. Sakykime, turime implikaciją

$$x-3=0 \Rightarrow 2x=8.$$

Kadangi

$$M=\{3\},\ N=\{4\},\ M \setminus N=\{3\} \setminus \{4\}=\{3\},$$

tai

$$U \setminus (M \setminus N)=\{x \in R \mid x \neq 3\}$$

yra duotosios implikacijos teisingumo aibė. Iš tikrųjų, jeigu $x=3$, tai turime teiginių implikaciją $3-3=0 \Rightarrow 6=8$, kuri yra klaidinga; jeigu $x=5$ $(5 \neq 3)$, tai $5-3=0 \Rightarrow 10=8$ (implikacija yra teisinga); jeigu $x=4$ $(4 \neq 3)$, tai $4-3=0 \Rightarrow 8=8$ (implikacija yra teisinga).

Išnagrinėję, pavyzdžiui, implikaciją $(x-1=3) \Rightarrow [(x-1)^2=9]$, įsitikiname, kad $(x-1)^2=9$ logiškai išplaukia iš predikato (lygties) $x-1=3$; čia $M=\{4\}$, $N=\{-2;\ 4\}$, $M \subset N$.

Ekvivalenčių predikatų $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ teisingumo aibės turi sutapti, t.y. turi būti $M=N$ (abi aibės gali būti ir tuščios). Pavyzdžiui,

$$4x-2=6 \Leftrightarrow x-2=0 \text{ arba } \frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x+1=x.$$

9. Kvantoriai. Predikatų logikoje yra svarbi operacija, kurios nėra teiginių logikoje, – kvantorių panaudojimas. Atlikus tą operaciją, galima gauti arba predikatus, arba teiginius.

Viena tos operacijos forma reiškia tai, ką pasakome žodžiais „visi“, „bet koks“, „kiekvienam“, kita – tai, ką pasakome žodžiais „egzistuoja“, „kai kuriems“, „kokiam nors“.

1) Sakykime, $P(x)$ yra koks nors predikatas. Sudarykime teiginį: „Visi x pasižymi savybe $P(x)$“; simboliškai užrašoma $(\forall x \in U)\, P(x)$,

arba, paprasčiau, $\forall x P(x)$ (skaitoma kiekvienam (visiems) x yra teisinga $P(x)$).

Operacijos $\forall$ simbolis vadinamas *bendrumo kvantoriumi*[1]. Remiantis bendrumo kvantoriaus prasme, teiginys $\forall x P(x)$ yra visada klaidingas (bet kuriems predikatams $P(x)$, išskyrus tapačiai teisingus).

Pavyzdžiui, jeigu U yra realiųjų skaičių aibė, tai predikatas $x^2 \geqslant 0$ yra tapačiai teisingas toje aibėje, o predikatas $x^2+1=0$ – tapačiai klaidingas. Todėl $(\forall x \in R)\, x^2 \geqslant 0$ – teisingas teiginys, o $(\forall x \in R)\, x^2+1=0$ – klaidingas.

2) Sakykime, turime teiginį: „Egzistuoja x, pasižymintis savybe $P(x)$". Simboliškai jį užrašome $(\exists x \in U) P(x)$, arba, paprasčiau, $\exists x P(x)$ (skaitome: kai kurie x pasižymi $P(x)$).

Operacijos $\exists$ simbolis vadinamas *egzistavimo kvantoriumi*[2]. Remiantis egzistavimo kvantoriaus prasme, teiginys $\exists x P(x)$ yra visada teisingas (bet kuriems predikatams $P(x)$, išskyrus tapačiai klaidingus).

Pavyzdžiui, jeigu U yra realiųjų skaičių aibė, tai, prirašę kvantorių $\exists$ prie predikato $x^2<0$, gausime teiginį $(\exists x \in R)\, x^2<0$. Tas teiginys yra klaidingas.

Pratimai

1. Pateikite kelis teiginių pavyzdžius.

2. Kurie iš užrašytųjų sakinių yra teiginiai:

1) Maskva – TSRS sostinė.
2) X klasės mokinys.
3) ΔABC panašus į $\Delta A_1B_1C_1$.
4) $3+2\sqrt{2}-28$.
5) Mėnulis yra Marso palydovas.
6) $17 \cdot 2+3=37$.
7) $17 \cdot 2+3=85$.
8) Kiekvienas natūrinis skaičius yra didesnis už nulį.

Kurie iš tų teiginių yra teisingi? Kurie – klaidingi?

3. Sakykime, A yra stačiųjų trikampių aibė, B – aibė trikampių, turinčių du smailiuosius kampus. Kurie teiginiai yra teisingi: $A \subset B$, $B \subset A$, $B \supset A$?

4. Sakykime, K yra visų duotojo apskritimo liestinių aibė, π – visų plokštumos tiesių aibė. Vartodami simbolį $\subset$, užrašykite teiginį: kiekviena liestinė yra tiesė.

5. Sakykime, A yra reiškinio $3{,}5+8r$ reikšmių aibė, kai r – bet kuris racionalusis skaičius, B – reiškinio $3{,}5+8r$ reikšmių aibė, kai $r=-1$, $r=-0{,}5$, ir P – aibė r reikšmių.

Kurie teiginiai yra teisingi:

a) $A \supset P$; $A=P$; $B \subset A$; $B \supset A$; $-1 \in B$, $-0{,}5 \in B$?
b) Jeigu $x \in B$, tai $x \in A$.
c) Jeigu $x \in P$, tai $x \in A$.
d) Jeigu $y \in P$, tai $y \in B$.

6. Sudarykite neiginius šių teiginių:

a) 4 dalijasi iš 2.
b) $42+7 \neq 50$.
c) Šiandien pirmadienis.
d) $7>2$.

7. Duoti teiginių neiginiai:

1) Lygiašonio trikampio pusiaukraštinė nėra aukštinė.

[1] Apversta lotyniška raidė A, primenanti vokišką žodį „alle" – visi.

[2] Apversta lotyniška raidė E, primenanti vokišką žodį „existieren" – egzistuoti.

2) 5 yra sudėtinis skaičius.
3) $2+3=5$.
Suformuluokite tuos teiginius.

8. Nurodykite kelis sudėtinio teiginio $p \wedge q$ pavyzdžius, kai abu teiginiai yra teisingi; klaidingi. Kurią reikšmę įgyja $p \wedge q$ kiekvienu iš tų atvejų? Atsakymą pagrįskite.

9. Sakykime, A ir B yra teiginiai: „Tas trikampis yra lygiašonis" ir „Tas trikampis — taisyklingas". Perskaitykite teiginį $\bar{A} \wedge \bar{B}$ žodžiais.

10. Nustatykite, kurie teiginiai yra teisingi:

$$3 \geqslant 3, \ 15 \leqslant 17, \ 1 \leqslant \frac{1}{2}.$$

11. Sakykime, teiginys p yra šitoks:
a) $2 \cdot 2=4$.
b) Dramblys yra vabzdys.
c) Aš esu berniukas.
Kiekvienu atveju raskite teiginį $\bar{p}$.
Sudarykite teiginius $p \wedge \bar{p}$, $p \vee \bar{p}$ ir nustatykite jų reikšmes.

12. Sakykime, teiginys p yra „Tas sveikasis teigiamas skaičius yra lyginis", o q yra „Tas sveikasis teigiamas skaičius yra pirminis". Perskaitykite žodžiais teiginius:

a) $p \wedge q$; b) $\bar{p} \wedge q$; c) $p \wedge \bar{q}$; d) $\bar{p} \vee \bar{q}$.

13. Užrašykite simboliškai šiuos teiginius:
a) jeigu skaičius dalijasi iš 2 ir iš 3, tai jis dalijasi iš 6;
b) Jeigu skaičius dalijasi iš 2 ir nesidalija iš 6, tai jis nesidalija iš 3.

14. Implikaciją $p \Rightarrow q$ galima išreikšti disjunkcija ir neiginiu:

$$p \Rightarrow q = \bar{p} \vee q.$$

Sudarę atitinkamų reikšmių lentelę, įsitikinkite, kad ta formulė teisinga.

15. Į klausimą, kuris iš trijų mokinių A, B ir C mokėsi logikos, buvo atsakyta:
1) jeigu mokėsi A, tai mokėsi ir B; bet, sakydami, kad
2) jeigu mokėsi C, tai mokėsi ir B, — klystumėte.
Kuris iš jų mokėsi logikos?

16. Bėgimo varžybose dalyvavo keturi draugai: Andrejus, Borisas, Vasilijus ir Grigorijus. Jie ir užėmė pirmąsias keturias vietas. Paklausus, kurią vietą užėmė kiekvienas, jie atsakė:
Andrejus: aš buvau antras, o Borisas — trečias.
Vasilijus: aš buvau antras, o Andrejus — pirmas.
Grigorijus: aš buvau antras, o Borisas — ketvirtas.
Nustatykite, kurią vietą užėmė kiekvienas iš jų, jeigu yra žinoma, kad kiekviename atsakyme vienas teiginys yra teisingas, o kitas — klaidingas.

17. Kavinėje susitiko trys draugai: skulptorius Belovas, smuikininkas Černovas ir dailininkas Ryžovas. „Nuostabu, kad vieno iš mūsų plaukai yra balti, kito — juodi ir trečio — rudi, bet nė vieno plaukų spalva neatitinka pavardės" — pasakė juodaplaukis. „Tu teisus" — pasakė Belovas.
Kokios spalvos yra dailininko plaukai?

18. Nubraižykite kontaktines schemas, atitinkančias sudėtinius teiginius:
a) $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$;
b) $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \bar{B}) \vee \bar{A}$;
c) $(A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge C)$.

19. Pavaizduokite (žr. 15, 16, 18 pav.) šias teiginių formas (predikatus):
a) jeigu elementai pasižymi savybe A, tai jie pasižymi ir savybe B;
b) jeigu elementai pasižymi savybe A, tai jie pasižymi ir savybe $\bar{B}$;
c) jeigu elementai pasižymi savybe $\bar{A}$, tai jie pasižymi ir savybe $\bar{B}$.

20. Duota aibė $E=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ ir predikatas $P(x)$: „x yra lyginis skaičius". Suformuluokite to predikato neiginį ir raskite neiginio reikšmių aibę — aibės E poaibį.

§ 7. APIE MATEMATINIUS ĮRODYMUS

1. Teoremų rūšys ir jų tarpusavio sąryšis. Kiekvienoje teoremoje turi būti nurodyta:

1) kokiomis sąlygomis joje nagrinėjamas tas arba kitas matematinis faktas (teoremos sąlyga);

2) kas yra apie tą faktą tvirtinama (teoremos išvada).

Išnagrinėsime, pavyzdžiui, teoremą: „Jeigu keturkampis yra lygiagretainis, tai susikirsdamos jo įstrižainės dalijasi pusiau".

Čia *teoremos sąlyga* (p): keturkampis yra lygiagretainis;

teoremos išvada (q): įstrižainių susikirtimo taškas dalija kiekvieną iš jų pusiau.

Kad būtų lengviau atskirti teoremos sąlygą ir išvadą, teorema dažnai formuluojama kaip implikacija, vartojant loginį jungtuką „jeigu ..., tai...". Bendrai teoremą galima užrašyti logine kalba šitaip: $p \Rightarrow q$.

Įrodinėjant teoremą, reikia parodyti, kad iš išpildytos sąlygos logiškai išplaukia išvada, t.y., tarus, kad p yra teisinga, remiantis apibrėžtomis logikos taisyklėmis, reikia parodyti, kad q taip pat yra teisinga.

Turint kokią nors teoremą $p \Rightarrow q$, iš jos galima gauti ne vieną naują teoremą:

a) *atvirkštinę*: $q \Rightarrow p$;

b) *priešingą*: $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$;

c) *atvirkštinę priešingai*: $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$.

Tais atvejais pradinė teorema yra vadinama *tiesiogine*.

Iliustruosime teoremų rūšis žinomos geometrijos teoremos pavyzdžiu.

1) Jeigu keturkampis yra lygiagretainis, tai jo įstrižainės susikirsdamos dalijasi pusiau ($p_1 \Rightarrow q_1$).

2) Jeigu keturkampio įstrižainės susikirsdamos dalijasi pusiau, tai tas keturkampis yra lygiagretainis ($q_1 \Rightarrow p_1$).

3) Jeigu keturkampis nėra lygiagretainis, tai jo įstrižainės susikirsdamos nesidalija pusiau ($\bar{p}_1 \Rightarrow \bar{q}_1$).

4) Jeigu keturkampio įstrižainės susikirsdamos nesidalija pusiau, tai toks keturkampis nėra lygiagretainis ($\bar{q}_1 \Rightarrow \bar{p}_1$). Šiame pavyzdyje visos keturios teoremos yra teisingos; tuo nesunku įsitikinti, įrodant kiekvieną iš jų.

Tačiau taip būna ne visada.

Išnagrinėsime tvirtinimą, suformuluotą kaip teoremą: jeigu dviejų kampų atitinkamos kraštinės yra viena kitai statmenos, tai tie kampai yra kongruentūs ($p_2 \Rightarrow q_2$). Suformuluosime atvirkštinę teoremai, priešingą ir atvirkštinę priešingai:

a) jeigu du kampai yra kongruentūs, tai atitinkamos jų kraštinės yra viena kitai statmenos ($q_2 \Rightarrow p_2$);

b) jeigu dviejų kampų atitinkamos kraštinės nėra viena kitai statmenos, tai tie kampai nėra kongruentūs ($\bar{p}_2 \Rightarrow \bar{q}_2$);

c) jeigu du kampai nėra kongruentūs, tai atitinkamos jų kraštinės nėra viena kitai statmenos ($\bar{q}_2 \Rightarrow \bar{p}_2$).

Šiame pavyzdyje;

a) nors tiesioginė teorema yra teisinga, jai atvirkštinė teorema – klaidinga (pavyzdžiui, statieji kampai yra kongruentūs, bet atitinkamos jų kraštinės gali ir nebūti viena kitai statmenos);

b) teisinga ne tik tiesioginė teorema, bet ir atvirkštinė priešingajai;

c) klaidinga ne tik atvirkštinė duotajai, bet ir jai priešinga teorema.

Tos savybės nėra atsitiktinės. Keturių rūšių teoremos yra glaudžiai susijusios, būtent:

1) $p \Rightarrow q$ ir $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ yra kartu teisingos arba klaidingos;

2) $q \Rightarrow p$ ir $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ taip pat yra kartu teisingos arba klaidingos.

Teoremų tarpusavio sąryšio savybė labai palengvina jų nagrinėjimą. Vadinasi, nagrinėjant matematinių objektų savybes, kurios formuluojamos kaip teoremos, nereikia gvildenti visų keturių rūšių teoremų: užtenka nustatyti, kad kuri nors iš poromis ekvivalenčių teoremų (tiesioginė ir atvirkštinė arba tiesioginė ir priešinga ir t.t.) yra teisinga arba klaidinga, ir jau žinosime, teisingos ar klaidingos kitos dvi teoremos. Todėl bet kuriame matematikos kurse paprastai yra įrodomos tik tiesioginė ir atvirkštinė teoremos, o kitos – labai retai.

2. Būtinumas ir pakankamumas. Išnagrinėsime šiuos teiginius:

1) jeigu natūrinis skaičius yra lyginis, tai jis dalijasi iš 6;

2) jeigu natūrinis skaičius dalijasi iš 6, tai jis yra lyginis;

3) jeigu natūrinis skaičius yra lyginis, tai jis dalijasi iš 2;

4) jeigu natūrinis skaičius dalijasi iš 2, tai jis yra lyginis.

Kiekvieną tų teiginių galima užrašyti matematinės logikos kalba:

$$1)\ p_1 \Rightarrow q_1;\quad 2)\ q_1 \Rightarrow p_1;\quad 3)\ p_2 \Rightarrow q_2;\quad 4)\ q_2 \Rightarrow p_2.$$

Matome, kad pirmasis teiginys yra klaidingas, o antrasis, taip pat trečiasis ir ketvirtasis teiginiai yra teisingi.

Formuluojant teoremas, dažnai vartojami terminai „pakanka", „būtina", „pakanka ir būtina".

Išsiaiškinsime tų terminų prasmę.

1. Sąlyga p yra vadinama *pakankama* išvadai q, jeigu iš p logiškai išplaukia q (t.y. teisinga teorema $p \Rightarrow q$).

2. Sąlyga p yra vadinama *būtina* išvadai q, jeigu iš q logiškai išplaukia p (t.y. teisinga teorema $q \Rightarrow p$).

3. Sąlyga p yra vadinama *būtina* ir *pakankama* išvadai q, jeigu iš p logiškai išplaukia q, o iš q logiškai išplaukia p (t.y. teisingos abi teoremos: tiesioginė ir atvirkštinė).

Nagrinėtame pavyzdyje p_1 nėra pakankama sąlyga q_1, nes iš p_1 neišplaukia q_1; p_2 yra pakankama sąlyga q_2, nes iš p_2 logiškai išplaukia q_2.

Tačiau p_1 yra būtina sąlyga q_1, nes iš q_1 logiškai išplaukia p_1.

Sąlyga p_2 yra būtina ir pakankama q_2, nes yra teisingos abi teoremos: $p_2 \Rightarrow q_2$ ir $q_2 \Rightarrow p_2$ (t.y. teisingas loginis ekvivalentumas $p_2 \Leftrightarrow q_2$).

Galimi atvejai, kai:

a) sąlyga p yra pakankama, bet nebūtina išvadai q;

b) sąlyga p yra būtina, bet nepakankama išvadai q.

Pirmuoju atveju iš to, kad p yra teisinga, išplaukia, kad q taip pat teisinga, bet ir iš kitos sąlygos p_1 gali išplaukti, kad q yra teisinga. Pavyz-

džiui, jeigu skaičius dalijasi iš 6, tai to užtenka, kad jis būtų lyginis; jeigu skaičius dalijasi iš 4, tai to irgi užtenka, kad jis būtų lyginis.

Antruoju atveju iš to, kad q yra teisinga, išplaukia, kad p taip pat teisinga; bet q gali būti klaidinga, nors p ir teisinga. Pavyzdžiui, kad skaičius dalytųsi iš 6, būtina, bet nepakanka, kad jis būtų lyginis (skaičius 4 yra lyginis, bet nesidalija iš 6).

Vartojant terminus „pakanka", „būtina", „būtina ir pakanka", vietoj žodžio „sąlyga" dažnai sakoma „požymis".

Vietoj žodžių „būtina ir pakanka" taip pat dažnai sakoma „tada ir tik tada", „tuo ir tik tuo atveju", „tie ir tik tie". Reikia turėti omenyje, kad atskiros tų žodžių grupių dalys taip pat turi konkrečią prasmę; pavyzdžiui, žodžiai „tik tuo atveju" „tik tada" ir t.t. pakeičia žodžius „būtina sąlyga", o žodžiai „tada", „tuo atveju" ir t.t. pakeičia žodžius „pakankama sąlyga".

3. Matematinės indukcijos metodas. Išnagrinėsime svarbų teoremų įrodymo būdą, vadinamą *matematinės indukcijos metodu.* Jis yra pagrįstas vadinamuoju *matematinės indukcijos principu* (aksioma), kurį dabar suformuluosime.

Jeigu koks nors teiginys, kuriame kalbama apie natūrinį skaičių n, yra teisingas, kai $n=1$, ir jeigu iš prielaidos, kad jis yra teisingas su kuria nors reikšme $n=k$, išplaukia (gali būti logiškai išvesta), kad jis teisingas ir su reikšme $n=k+1$ (sekančia po k), tai tas teiginys yra teisingas su bet kokiu natūriniu n.

Taigi, įrodinėjant kokią nors teoremą matematinės indukcijos metodu, reikia:

1 žingsnis: patikrinti, ar teorema teisinga, kai $n=1$;

2 žingsnis: tarti, kad teorema yra teisinga įkuriam nors $n=k$, ir, remiantis ta prielaida, įrodyti, kad ta teorema yra teisinga ir kai $n=k+1$;

3 žingsnis: remiantis pirmuoju ir antruoju įrodymo žingsniais bei matematinės indukcijos principu (m. i. p.), padaryti išvadą, kad teorema yra teisinga kiekvienam natūriniam n.

Kaip pavyzdį tuo metodu įrodysime, kad kiekvienam natūriniam n yra teisinga formulė

$$S_n = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (*)$$

Įrodymas.

1 žingsnis: kai $n=1$,

$$S_1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = 1;$$

taigi formulė yra teisinga.

2 žingsnis: sakykime, (*) formulė yra teisinga, kai $n=k$, t.y.

$$S_k = 1^2+2^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Įrodysime, kad tada yra teisinga ir formulė

$$S_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

$$S_k+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6};$$

tai ir reikėjo įrodyti.

3 žingsnis: iš pirmojo ir antrojo įrodymo žingsnių bei m. i. p. išplaukia, kad (*) formulė yra teisinga kiekvienam $n\in N$.

Kartais įrodinėdami matematinės indukcijos metodu, pirmajame žingsnyje imame ne $n=1$, bet $n=n_0>1$.

Išnagrinėsime dar du matematinės indukcijos metodo taikymo pavyzdžius.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad bet kokią didesnę už 7 rublius pinigų sumą, sudarytą iš sveikojo rublių skaičiaus, galima be grąžos sumokėti 3 ir 5 rublių banknotais.

Įrodymas.

1 žingsnis: kai $n=8$, tvirtinimas yra teisingas: $8=5+3$.

2 žingsnis: sakykime, tvirtinimas teisingas, kai yra k rublių ($k\geqslant 8$). Galimi du atvejai: a) k rublių galima sumokėti tik trirublinėmis; b) k rublių galima sumokėti banknotais, tarp kurių yra bent viena penkrublinė.

Pirmuoju atveju trirublinių yra ne mažiau kaip trys, nes $k>8$. Norint sumokėti $k+1$ rublį, užtenka tris trirublines pakeisti dviem penkrublinėmis. Antruoju atveju, norint sumokėti $k+1$ rublį, užtenka vieną penkrublinę pakeisti dviem trirublinėmis.

Lieka trečiasis žingsnis, ir teiginys yra įrodytas.

2 pavyzdys. Įrodysime nelygybę

$$(1+\alpha)^n>1+n\alpha,$$

kai

$$\alpha>-1,\ \alpha\neq 0,\ n\in N,\ n>1.$$

Ta nelygybė yra vadinama *Bernulio nelygybe.*

Įrodymas.

1 žingsnis: kai $n=2$, nelygybė yra teisinga: $(1+\alpha)^2=1+2\alpha+\alpha^2>$ $>1+2\alpha$ (nes $\alpha^2>0$).

2 žingsnis: įrodysime, kad

$$[(1+\alpha)^k>1+k\alpha]\Rightarrow[(1+\alpha)^{k+1}>1+(k+1)\alpha].$$

Kadangi $\alpha>-1$, tai $\alpha+1>0$. Padauginę abi nelygybės (kuri yra teisinga, remiantis indukcijos prielaida) puses iš $1+\alpha$, gausime teisingą nelygybę

$$(1+\alpha)^{k+1}>(1+k\alpha)(1+\alpha)\Rightarrow(1+\alpha)^{k+1}>1+(k+1)\alpha+k\alpha^2.$$

Mažesniojoje nelygybės dalyje atmetę teigiamą dėmenį, tą dalį tik sumažinsime, todėl

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\alpha.$$

Lieka trečiasis žingsnis, ir nelygybė bus įrodyta.

Pratimai

1. Duotos dvi aibės:

$$A=\{1;\ 4;\ 2;\ 3;\ 6;\ 7\},$$

$$B=\{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 5;\ 4;\ 9;\ 7;\ 8\}.$$

a) Kuri iš tų aibių yra kitos poaibis? Užrašykite tai simboliškai. Raskite tų aibių sankirtą ir sąjungą.

b) Kurie teiginiai yra teisingi:

$$A=B,\ A\subset B,\ B\subset A,\ (A\cap B)\supset(A\cup B),\ (A\cup B)\supset(A\cap B)?$$

2. Loginiais matematiniais simboliais užrašykite teiginį „Taškas A priklauso tiesei a ir nepriklauso tiesei b“.

3. Užrašykite žodžiais sudėtinį teiginį $A\vee\bar{B}$, kai A: „5 yra pirminis skaičius“ ir B: „5 yra lyginis skaičius“.

4. Nurodykite sąlygas ir išvadas šių teoremų:

a) jeigu vienas trikampio kampas yra statusis, tai kiti du – smailieji;

b) visi įbrėžtiniai kampai, kurie remiasi į vieną ir tą patį lanką, yra tarpusavyje kongruentūs;

c) stačiojo trikampio įžambinės ilgio kvadratas yra lygus statinių ilgių kvadratų sumai;

d) kiekvienos trikampio kraštinės ilgis yra mažesnis už kitų dviejų kraštinių ilgių sumą, bet didesnis už jų skirtumą.

Nurodykite, kurių teoremų sąlyga išvadai yra būtina, pakankama, būtina ir pakankama.

5. Suformuluokite ir įrodykite teoremas, atvirkštines užrašytosioms:

a) rombo įstrižainės dalija jo kampus pusiau;

b) jeigu koks nors skaičius dalijasi iš 9, tai ir jo skaitmenų suma dalijasi iš 9;

c) stačiojo trikampio įžambinės ilgio kvadratas yra lygus statinių ilgių kvadratų sumai.

6. Suformuluokite priešingą, atvirkštinę ir atvirkštinei priešingą teoremas, kai tiesioginės yra šitokios:

a) bet kokį stačiakampį galima įbrėžti į apskritimą;

b) jeigu kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ laisvasis narys c yra lygus nuliui, tai viena tos lygties šaknis lygi nuliui;

c) jeigu du trikampio kampai yra kongruentūs, tai toks trikampis yra lygiašonis.

§ 8. REALIEJI SKAIČIAI

1. Racionalieji skaičiai. Aštuonmetės mokyklos matematikos kurse jūs susipažinote su įvairiais skaičiais: natūriniais, sveikaisiais ir racionaliaisiais. Skaičiaus sąvoka formavosi palaipsniui, praktinių poreikių įtakoje. Pavyzdžiui, natūriniai skaičiai atsirado todėl, kad reikėjo skaičiuoti daiktus, t.y. atsakyti į klausimą „Kiek elementų yra duotoje baigtinėje aibėje?“ Suskaičiavę knygų spintos lentynose esančias knygas,

sakome, kad pirmoje lentynoje yra 5 knygos, t.y. pirmos lentynos knygų aibę sudaro 5 elementai (knygos), o antroje lentynoje – 8 knygos, t.y. antros lentynos knygų aibę sudaro 8 elementai (knygos) ir t.t.

Tačiau kartais vienoje knygų spintos lentynoje knygų gali ir nebūti (joje gali būti sąsiuviniai arba kitokie daiktai). Tos lentynos knygų aibė būtų tuščia, nes jai nepriklausytų nė vienas elementas (knyga). Tuo atveju į klausimą „Kiek elementų yra duotoje aibėje?“ padėtų atsakyti skaičius 0 – aibėje nėra nė vieno elemento (knygos).

Taigi prie visų natūrinių skaičių aibės $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$ reikėjo prijungti skaičių 0.

Natūrinių skaičių aibės N ir aibės, sudarytos iš vienintelio skaičiaus 0, sąjunga yra *neneigiamų sveikųjų skaičių aibė* $Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$.

Tačiau, sprendžiant uždavinius, kuriuos kėlė gyvenimo praktika, vadinasi, ir matematinius uždavinius, atspindinčius realią situaciją, vien neneigiamų sveikųjų skaičių neužteko. Aukštesnei ir žemesnei už nulį oro temperatūrai, priešingų krypčių judėjimui apibūdinti reikia priešingų skaičių. Pavyzdžiui, kai oro temperatūra yra 6 laipsniai šilumos arba 6 laipsniai šalčio, užrašome šitaip: $+6°$ ir $-6°$. Skaičiai 6 ir -6 yra vadinami *priešingais*: -6 yra priešingas 6, o 6 priešingas -6. Bendruoju atveju natūriniam skaičiui n yra priešingas $-n$, o skaičiui $-n$ yra priešingas n. Nulis yra priešingas pats sau.

Natūriniai skaičiai, jiems priešingi skaičiai ir nulis sudaro *sveikųjų skaičių aibę* Z.

Matuojant dydžius, prireikė išplėsti sveikųjų skaičių aibę ir apibrėžti racionaliuosius skaičius. Pavyzdžiui, Maskvos Kremliaus Spasko bokšto su žvaigžde aukštis yra 71 m, Kremliaus kurantų ciferblato skersmuo – 6,12 m, valandinės rodyklės ilgis – 2,97 m, minutinės – 3,28 m, Maskvos miesto teritorija – 878,7 km², 1971 m. sausio 1 d. Maskvos mieste gyveno 7,6 mil. žmonių, vidutinė šalčiausio mėnesio (sausio) temperatūra Maskvoje yra $-10,2$°C, o šilčiausio (liepos) $+18,1$°C. Arba kitas pavyzdys: akademinė valanda trunka 45 minutes, arba 3/4 valandos, o viena iš pertraukų – 10 minučių, arba 1/6 valandos.

Taigi, pasirinkus matavimo vienetą, dydžio skaitinė reikšmė užrašoma įvairiais racionaliaisiais skaičiais – sveikaisiais ir trupmeniniais, teigiamais ir neigiamais.

Sveikieji ir trupmeniniai skaičiai sudaro *racionaliųjų skaičių aibę* Q.

Kiekvieną racionalųjį skaičių galima užrašyti trupmena $\frac{m}{n}$, kurioje $m \in Z$, $n \in N$ (t.y. skaitiklis yra sveikasis skaičius, o vardiklis – natūrinis).

Racionalųjį skaičių galima užrašyti skirtingomis trupmenomis. Pavyzdžiui,

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{7}{21} = \frac{10}{30},$$

$$\frac{2}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{-10}{25} = \frac{-14}{35} = \frac{-20}{50},$$

$$-1{,}4=\frac{-7}{5}=\frac{-14}{10}=\frac{-140}{100},$$

$$3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{30}{10},\quad 0=\frac{0}{1}=\frac{0}{8}=\frac{0}{10}.$$

Iš tų pavyzdžių išplaukia, kad tarp trupmenų, kuriomis galima išreikšti duotą racionalųjį skaičių, visada yra vienintelė neprastinama; sveikuosius skaičius atitinka trupmena, kurios vardiklis lygus 1.

Sakykime, duotas neneigiamas racionalusis skaičius, kurį užrašysime trupmena $\frac{m}{n}$, $m\geqslant 0$, $n>0$. Skaitiklį padaliję iš vardiklio, gausime baigtinę arba begalinę dešimtainę trupmeną. Pavyzdžiui,

$$\frac{1}{4}=0{,}25,\quad \frac{5}{9}=0{,}5555\ldots$$

Susitarsime kiekvieną baigtinę dešimtainę trupmeną užrašyti kaip begalinę dešimtainę trupmeną, kurioje į dešinę nuo nelygių nuliui dešimtainių ženklų yra surašyti nuliai, pavyzdžiui,

$$\frac{1}{4}=0{,}25=0{,}25000\ldots$$

Sveikuosius skaičius užrašysime taip pat kaip begalines dešimtaines trupmenas, kuriose į dešinę nuo kablelio surašyti nuliai, pavyzdžiui, $15=15{,}000\ldots$ Taigi kiekvieną neneigiamą racionalųjį skaičių galima užrašyti kaip begalinę dešimtainę trupmeną:

$$r=a_0,\ a_1a_2a_3\ldots, \tag{1}$$

kur $[r]=a_0$ yra *sveikoji dalis*, o $\{r\}=0,\ a_1a_2a_3\ \ldots$ – *trupmeninė dalis*. Vadinasi,

$$r=[r]+\{r\}.$$

Neigiamą racionalųjį skaičių taip pat galima užrašyti kaip begalinę dešimtainę trupmeną. Toliau susitarsime neigiamo skaičiaus sveikąją dalį žymėti brūkšneliu (minusu) viršuje. Pavyzdžiui,

$$\frac{-5}{4}=-2+\frac{3}{4}=-2+0{,}75=\bar{2},75000\ldots,$$

$$-0{,}789=-1+0{,}211=\bar{1},211000\ldots,$$

$$-15\frac{4}{9}=-16+\frac{5}{9}=-16+0{,}555\ldots=\overline{16},555\ldots$$

Taigi kiekvieną racionalųjį skaičių galima užrašyti kaip begalinę dešimtainę trupmeną

$$a_0,\ a_1a_2a_3\ \ldots,$$

kur a_0 yra sveikoji dalis, o a_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, – sveikieji skaičiai, tenkinantys nelygybę $0\leqslant a_i\leqslant 9$.

1. Kurie aibės

$$A=\left\{-90;\ -12{,}3;\ -5;\ -\frac{1}{6};\ 0;\ \frac{3}{4};\ 5;\ 14;\ 18\frac{2}{5};\ 90\right\}$$

elementai yra natūriniai skaičiai, sveikieji, trupmeniniai, racionalieji, neigiami, neneigiami skaičiai?

2. Sudarykite aibės

$$B=\left\{-35;\ -32\frac{1}{3};\ -21;\ -4;\ 0;\ \frac{1}{4};\ 3;\ 4;\ 8;\ 9;\ 16;\ 21\right\}$$

poaibius, kurių elementai būtų: a) natūriniai skaičiai; b) sveikieji skaičiai; c) trupmenos; d) nelyginiai skaičiai; e) 4 kartotiniai; f) neigiami skaičiai.

3. Kurie tvirtinimai yra teisingi: $N\subset Z_0$, $Z_0\subset N$, $N\subset Z$, $Z\subset N$, $Z\subset Q$, $Q\subset Z$?

4. Duotos aibės A ir U. Įsitikinkite, kad $A\subset U$:

a) $A=\{-15;\ -12;\ 14;\ 20\}$,
$U=\{-20;\ -15;\ -14;\ -12;\ 0;\ 2;\ 3;\ 12;\ 14;\ 16;\ 20;\ 30\}$;

b) $A=\{-8;\ -7;\ 0;\ 3;\ 4;\ 7\}$,
$U=\{-12;\ -9;\ -8;\ -7;\ -3;\ 0;\ 1;\ 3;\ 4;\ 6;\ 7;\ 14\}$.

5. Raskite papildinius:
a) natūrinių skaičių aibės — iki neneigiamų sveikųjų skaičių aibės;
b) lyginių skaičių aibės — iki sveikųjų skaičių aibės;
c) neneigiamų sveikųjų skaičių aibės — iki racionaliųjų skaičių aibės;
d) teigiamų racionaliųjų skaičių aibės — iki racionaliųjų skaičių aibės;
e) neteigiamų racionaliųjų skaičių aibės — iki racionaliųjų skaičių aibės.

6. Užrašykite kaip sveikojo skaičiaus santykį su natūriniu šiuos skaičius:

a) $-20;\ -12;\ 0;\ 5;\ 36;\ 75$; b) $-4\frac{1}{7};\ -2{,}3;\ -1\frac{4}{9};\ 0{,}4;\ 5\frac{1}{7};\ 8\frac{11}{13}$.

7. Užrašykite kaip neprastinamą trupmeną $\frac{m}{n}$, kur $m\in Z$, $n\in N$, šiuos skaičius:

a) $-9;\ 1\frac{8}{15};\ 3\frac{12}{14};\ \frac{140}{70};\ -10{,}5$; b) $-11\frac{1}{2};\ 3;\ -20;\ -5\frac{3}{9};\ 0{,}5$.

8. Užrašykite kaip begalinę dešimtainę trupmeną šiuos skaičius:

a) -5; b) 4; c) $-\frac{1}{5}$; d) $-14{,}93$; e) $-0{,}3$; f) $5{,}3$; g) $\frac{7}{8}$; h) $\frac{1}{7}$; i) $\frac{11}{30}$.

2. Periodinės dešimtainės trupmenos. Praeitame skirsnyje racionaliuosius skaičius rašėme kaip begalines dešimtaines trupmenas, kuriose nuo tam tikros vietos dešimtainiai ženklai pradėdavo kartotis, pavyzdžiui, 0,2500... ir 0,5555... Tokios dešimtainės trupmenos vadinamos begalinėmis periodinėmis dešimtainėmis trupmenomis.

Apibrėžimas. Begalinė dešimtainė trupmena

$$a_0,\ a_1a_2a_3\ldots$$

vadinama *periodine*, jeigu egzistuoja tokie natūriniai skaičiai N ir p, kad

$$a_{n+p}=a_n \quad \text{kiekvienam } n\geqslant N.$$

Pavyzdžiui, 0,5555... yra periodinė dešimtainė trupmena, nes, paėmę $N=1$ ir $p=1$, turėsime $a_{n+1}=a_n=5$ kiekvienam $n\geqslant 1$. Skaičius 0,2500... taip pat yra užrašytas kaip begalinė periodinė dešimtainė trup-

mena. Iš tikrųjų, paėmę $N=3$, $p=1$, turėsime $a_{n+1}=a_n=0$ kiekvienam $n\geqslant 3$.

Skaičius $\overline{3},125787878\ldots$ taip pat užrašytas kaip begalinė dešimtainė periodinė trupmena, nes, kai $N=4$ ir $p=2$, gauname $a_{n+2}=a_n$ kiekvienam $n\geqslant 4$. Iš tikrųjų kiekvienam $n\geqslant 4$ turėsime $a_n=7$, kai n yra lyginis, ir $a_n=8$, kai n – nelyginis.

Begalinės periodinės trupmenos užrašomos šitaip: trupmena $6{,}2500\ldots$ žymima $6{,}25(0)$; trupmena $0{,}555\ldots$ žymima $0{,}(5)$; trupmena $\overline{3},125787878\ldots$ žymima $\overline{3},125(78)$. Skaičius, esantis skliaustuose, vadinamas *periodu*. Todėl užrašą 6,25(0) reikėtų skaityti šitaip: „šeši sveiki, dvidešimt penkios šimtosios ir nulis periode“, užrašą 0,(5) – „nulis sveikų ir penki periode“, o užrašą $\overline{3},125(78)$ – „trys su minusu, šimtas dvidešimt penkios tūkstantosios ir septyniasdešimt aštuoni periode“.

Kiekvieną racionalųjį skaičių galima užrašyti kaip begalinę periodinę dešimtainę trupmeną.

Pavyzdžiui, racionalusis skaičius $\frac{5}{11}$ užrašomas kaip dešimtainė periodinė trupmena 0,(45); toks užrašas gaunamas, dalijant 5 iš 11:

$$\begin{array}{r|l} \rightarrow 5 & 11 \\ \underline{44} & \overline{0{,}45} \\ 60 & \\ \underline{55} & \\ \rightarrow 5 & \end{array}$$

Gavę liekaną, lygią 5, toliau galime ir nebedalyti, nes liekanos ir dalmens skaitmenys kartosis. Todėl $\frac{5}{11}=0{,}4545\ldots=0{,}(45)$, t.y. nulis sveikų ir 45 periode.

Bendruoju atveju, kai $r=[r]+\{r\}$ yra bet koks racionalusis skaičius, $[r]$ – sveikoji to skaičiaus dalis ir $\{r\}$ – trupmeninė, daroma šitaip: imama trupmeninė dalis $\{r\}=\frac{m}{n}$ ir m dalijamas iš n. Kadangi natūriniai skaičiai m ir n yra tokie, kad $m<n$, tai m dalybos iš n liekanos gali būti lygios kurios nors dešimtainės pozicijos k vienetams $(0\leqslant k\leqslant n-1)$. Kadangi yra tik n galimų k reikšmių, $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$, tai ne daugiau kaip po n žingsnių m dalmenyje iš n dešimtainiai ženklai pradės kartotis. Vadinasi, m dalijant iš n, gaunama periodinė dešimtainė trupmena.

Toliau, išnagrinėjus begalinės geometrinės progresijos sumą, bus įrodyta, kad *kiekviena begalinė periodinė dešimtainė trupmena yra racionalusis skaičius.*

P a s t a b a. Vėliau įrodysime, kad kiekviena begalinė periodinė dešimtainė trupmena, kurios periodas – devyniukė, yra lygi begalinei dešimtainei periodinei trupmenai, kurios periodas – nulis; pastarosios trupmenos dešimtainės pozicijos, esančios prieš periodą, skaitmuo, yra vienetu didesnis už pradinės trupmenos atitinkamą skaitmenį. Pavyzdžiui, begalinės periodinės trupmenos 0,2(9) ir 0,3(0) yra tas pats racionalusis skaičius.

Tačiau, remdamiesi dalybos algoritmu, būtent, dalydami 3 iš 10, gausime tik vieną begalinę periodinę dešimtainę trupmeną 0,3(0).

Ateičiai susitarsime, užrašydami racionaliuosius skaičius kaip begalines periodines dešimtaines trupmenas, begalinių periodinių trupmenų, kurių periodas yra devyni, nevartoti.

Pratimas

9. Užrašykite skaičius kaip begalines dešimtaines trupmenas. Paaiškinkite, kodėl tos trupmenos bus periodinės:

a) $-\frac{5}{9}$; b) $\frac{8}{3}$; c) $-\frac{7}{30}$; d) $\frac{23}{9}$; e) $\frac{40}{11}$.

3. Realieji skaičiai. Aštuonmetės mokyklos matematikos kurse buvo nurodyta, kad racionaliųjų skaičių aibė Q yra realiųjų skaičių aibės R poaibis, t.y. $Q \subset R$. Realiojo skaičiaus, kuris nėra racionalusis, pavyzdžiu buvo paimtas skaičius $\sqrt{2}$.

Teorema. *Nėra racionaliojo skaičiaus, kurio kvadratas būtų lygus* 2.

Įrodymas. Įrodysime prieštaravimo būdu. Sakykime, egzistuoja racionalusis skaičius, kurio kvadratas lygus 2 ir kuris užrašomas kaip neprastinama trupmena $\frac{m}{n}$. Tada

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2.$$

Vadinasi, m^2 yra lyginis skaičius, taigi ir m — lyginis. Iš tikrųjų, jeigu būtų $m=2k+1$ (nelyginis), tai $m^2=(4k^2+4k)+1$ būtų nelyginis, nes $(4k^2+4k)$ — lyginis. Jeigu m — lyginis skaičius, tai

$$m = 2k \Rightarrow 4k^2 = m^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2.$$

Iš paskutinės lygybės išplaukia, kad skaičius n^2 yra lyginis, taigi n taip pat lyginis. Vadinasi, pagal prielaidą abu skaičiai m ir n yra lyginiai. Tačiau tai prieštarauja prielaidai, kad trupmena $\frac{m}{n}$ yra neprastinama. Prieštaravimas rodo, jog prielaida, kad egzistuoja racionalusis skaičius, kurio kvadratas lygus 2, yra klaidinga.

Realieji skaičiai, kurie nėra racionalieji, vadinami *iracionaliaisiais*. Skaičius $\sqrt{2}$ yra iracionalusis; naudojantis žinomu algoritmu, jį galima užrašyti kaip begalinę dešimtainę trupmeną: $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ Kitas iracionaliojo skaičiaus pavyzdys gali būti skaičius π, t.y. skaičius, lygus apskritimo ilgio ir skersmens santykiui; jis užrašomas kaip begalinė dešimtainė trupmena: $\pi=3{,}14159\ldots$ Kiekviena nurodytoji begalinė trupmena nėra periodinė. Kiti begalinių periodinių trupmenų pavyzdžiai:

a) 3,141441444... (po pirmojo vieneto yra vienas ketvertas, po antrojo — du ir t.t.);

b) 4,1234567891011121314... (po kablelio yra visi natūriniai skaičiai).

Visų iracionaliųjų skaičių aibę žymėsime I.

Racionalieji ir iracionalieji skaičiai sudaro realiųjų skaičių aibę R. Taigi racionaliųjų skaičių aibė Q ir iracionaliųjų skaičių aibė I yra aibės R poaibiai: $Q \subset R$ ir $I \subset R$.

Pratimas

10. Kurie aibės

$$A=\left\{-\frac{3}{7};\ \frac{28}{11};\ -\frac{5}{3};\ 6;\ -1{,}7;\ \sqrt{3};\ \sqrt{5};\ 0;\ 0{,}(1);\quad 0{,}12122122212222\ldots\right\}$$

elementai yra

a) racionalieji skaičiai;

b) iracionalieji skaičiai?

Kiekvieną racionalųjį skaičių užrašykite kaip santykį $\frac{m}{n}$, kur $m \in Z$, $n \in N$.

4. Realiųjų skaičių palyginimas. Išnagrinėsime realiųjų skaičių palyginimo klausimą. Iš to, kas anksčiau pasakyta, išplaukia, jog kiekvienas realusis skaičius yra užrašomas kaip begalinė dešimtainė trupmena, be to, jeigu tas užrašas yra begalinė periodinė dešimtainė trupmena, tai skaičius — racionalusis, o jeigu begalinė neperiodinė dešimtainė trupmena, tai skaičius — iracionalusis. Galima tvirtinti, kad realiuosius skaičius ir begalines dešimtaines trupmenas, neturinčias devyniukės periode, sieja **abipus vienareikšmė atitiktis**: kiekvieną realųjį skaičių x atitinka visiškai apibrėžta begalinė dešimtainė trupmena $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ ir atvirkščiai, kiekviena tokia dešimtainė trupmena yra visiškai apibrėžtas realusis skaičius.

Nagrinėsime du realiuosius skaičius:

$$x=a_0,\ a_1a_2a_3\ldots \text{ ir } y=b_0,\ b_1b_2b_3\ldots$$

Skaičiai x ir y vadinami lygiais, jeigu lygios jų sveikosios dalys ir atitinkami dešimtainiai ženklai, t.y. $x=y$, jeigu $a_i=b_i$, $i=0, 1, 2, 3, \ldots$ Jeigu trupmenų sveikosios dalys nėra lygios arba vienos trupmenos kuris nors dešimtainis ženklas nėra lygus atitinkamam kitos trupmenos dešimtainiam ženklui, tai tie skaičiai laikomi *nelygiais.* Be to, jeigu sveikoji skaičiaus x dalis yra didesnė už sveikąją skaičiaus y dalį, tai $y<x$. Jeigu sveikosios dalys yra lygios, tai didesne laikoma ta trupmena, kurioje pirmas iš eilės (t.y. į dešinę nuo kablelio) dešimtainis ženklas, skirtingas nuo atitinkamo kitos trupmenos dešimtainio ženklo, yra didesnis. Pavyzdžiui,

$$1{,}567\ldots<2{,}345\ldots \text{ arba } \bar{3}{,}211\ldots<\bar{2}{,}456\ldots,$$

nes sveikoji antrojo skaičiaus dalis yra didesnė už sveikąją pirmojo skaičiaus dalį. Kitas pavyzdys: sakykime, duoti realieji skaičiai 4,5867... ir 4,5839... Akivaizdu, kad $4{,}5839\ldots<4{,}5867\ldots$, nes sveikosios tų skaičių dalys ir pirmieji du dešimtainiai ženklai po kablelio yra lygūs, bet pirmojo skaičiaus trečiasis ženklas po kablelio yra didesnis: $3<6$.

Realiųjų skaičių palyginimo taisyklė:

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots < b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots,$$

jeigu $a_k < b_k$ ir $a_i = b_i$ visiems $i < k$.

Pastebėsime, kad ši taisyklė yra teisinga, kad ir kokios būtų sveikosios realiųjų skaičių dalys. Pavyzdžiui, $\bar{5},38304\ldots < \bar{5},383100\ldots$

Pratimas

11. Palyginkite šias realiųjų skaičių poras:

a) 2,39748... ir 2,39784...; b) 2,3874... ir 0,3874...;
c) 1,2030... ir 1,2003...; d) 4,8181... ir 4,1881...;
e) 17,2... ir $\frac{87}{5}$; f) $-\frac{3}{7}$ ir 0,428...;
g) $-10,003\ldots$ ir $-10,030\ldots$; h) $-0,025\ldots$ ir $-0,052\ldots$

5. Dešimtainiai realiųjų skaičių artiniai. Nagrinėsime realųjį skaičių $\sqrt{3} = 1,7321\ldots$ Racionalieji skaičiai

$$c_0 = 1,$$
$$c_1 = 1,7,$$
$$c_2 = 1,73,$$
$$c_3 = 1,732,$$
$$c_4 = 1,7321,$$
$$\ldots\ldots$$

yra vadinami atitinkamai nuliniu, pirmuoju, antruoju ir t.t. realiojo skaičiaus $\sqrt{3}$ dešimtainiais artiniais su trūkumu atitinkamai 1 tikslumu; 0,1 tikslumu; 0,01 tikslumu; 0,001 tikslumu; 0,0001 tikslumu ir t.t.

Racionalieji skaičiai

$$c_0' = c_0 + 1 = 2,$$
$$c_1' = c_1 + 0,1 = 1,8,$$
$$c_2' = c_2 + 0,01 = 1,74,$$
$$c_3' = c_3 + 0,001 = 1,733,$$
$$c_4' = c_4 + 0,0001 = 1,7322,$$
$$\ldots\ldots$$

yra vadinami atitinkamai nuliniu, pirmuoju, antruoju ir t.t. realiojo skaičiaus $\sqrt{3}$ dešimtainiais artiniais su pertekliumi atitinkamai 1 tikslumu; 0,1 tikslumu; 0,01 tikslumu; 0,001 tikslumu; 0,0001 tikslumu ir t.t.

Jeigu turime realųjį skaičių

$$x = a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

tai skaičius

$$x_n = a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$$

yra vadinamas n-uoju *skaičiaus* x *artiniu su trūkumu* 10^{-n} *tikslumu*, o skaičius

$$x'_n = x_n + \frac{1}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

yra vadinamas n-uoju *skaičiaus* x *artiniu su pertekliumi* 10^{-n} *tikslumu*.

Tikslumui didėjant, dešimtainiai skaičiaus x artiniai su trūkumu, žinoma, didėja, o su pertekliumi – mažėja. Iš tikrųjų, esant bet kokiems $m<n$, dešimtainiai skaičiaus x artiniai tenkina nelygybes

$$x_m < x_n,$$

nes $a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_m < a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_m \ldots a_n$, ir

$$x'_m > x'_n,$$

nes

$$a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_m + \frac{1}{10^m} > a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_m \ldots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Pratimai

12. Raskite šių skaičių dešimtainius artinius su trūkumu ir pertekliumi 0,01 tikslumu:

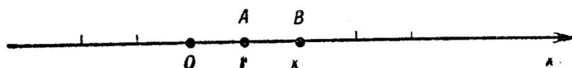
a) 0,37893; b) 1,4978; c) $-4{,}5678$; d) $-3{,}7326$; e) $\sqrt{5}$;

f) $-\sqrt{5}$; g) $\sqrt{7}$; h) $-\sqrt{7}$; i) $\frac{2}{3}$; j) $-\frac{2}{3}$; k) $\frac{15}{7}$; l) $-\frac{15}{7}$.

13. Įrodykite, kad skaičiaus $\sqrt{2}$ dešimtainiai artiniai su trūkumu ir pertekliumi 0,0001 tikslumu yra skaičiai 1,4142 ir 1,4143.

14. Įrodykite, kad skaičiaus $\sqrt{3}$ dešimtainiai artiniai su trūkumu ir pertekliumi 0,0001 tikslumu yra skaičiai $\bar{2},2678$ ir $\bar{2},2679$.

6. Realiųjų skaičių aibės geometrinis vaizdavimas. Plokštumoje nubrėžkime horizontalią tiesę, nurodykime joje kryptį ir taip parinkime taš-



22 pav.

kus O ir A, kad $[OA]$ būtų vienetinė atkarpa, t.y. $|OA| = 1$. Atkarpą $[OA]$ laikysime matavimo vienetu (22 pav.), o tokią tiesę OA vadinsime *koordinačių tiese*.

Remdamiesi žinoma taisykle (būtent, atidėdami mastelio vienetą arba jo dalį į kairę arba į dešinę nuo taško O), kiekvienam racionaliajam skaičiui x galėsime priskirti tokį tiesės OA tašką B, kad būtų išpildytos sąlygos:

1) jeigu $x>0$, tai taškas B yra į dešinę nuo taško 0; jeigu $x<0$, tai į kairę;

2) atkarpos OB ilgis lygus $|x|$[1].

Nesunku nustatyti svarbią racionaliųjų skaičių savybę, vadinamą tirštumu.

Aibės R tirštumo savybę reikia suprasti šitaip: tarp dviejų skirtingų racionaliųjų skaičių visada yra trečias racionalusis skaičius. Iš tikrųjų, jeigu x ir y yra racionalieji skaičiai ir, pavyzdžiui, $x<y$, tai skaičius $z=\frac{x+y}{2}$ yra racionalusis ir $x<z<y$.

Jeigu tiesės OA taškus, atitinkančius racionaliuosius skaičius, vadiname *racionaliaisiais taškais*, tai racionaliųjų skaičių tirštumo savybė reiškia, kad tarp dviejų kaip norima artimų racionaliųjų taškų visada yra kitų racionaliųjų taškų, be to, tie tarpiniai taškai sudaro begalinę aibę. Vadinasi, kiekvienoje tiesės OA atkarpoje yra begalinė racionaliųjų taškų aibė.

Nors racionaliųjų skaičių aibė ir yra tiršta, tiesės OA taškų aibę sudaro ne vien tik racionalieji taškai. Jau senovės Graikijos matematikai žinojo, kad kai kurios atkarpos yra *nebendramatės*; būtent, pasirinkus vieną atkarpą matavimo vienetu, bus tokių atkarpų, kurių ilgiai nėra racionalieji skaičiai. Pavyzdžiui, jeigu turime lygiašonį statųjį trikampį, kurio statiniai yra kongruentūs matavimo vienetui, tai jo įžambinė ir tas vienetas yra nebendramačiai.

Jeigu nuo taško O atidėsime atkarpą, kongruenčią to trikampio įžambinei, tai tos atkarpos galas jau nebus racionalusis taškas. Vadinasi, jeigu nuo taško O atidėsime atkarpas, nebendramates su matavimo vienetu, tai tų atkarpų galai nebus racionalieji taškai; juos vadinsime *iracionaliaisiais*.

Pabrėšime, kad iracionalieji tiesės OA taškai atitinka iracionaliuosius skaičius.

Vadinasi, radome realiųjų skaičių aibės atovaizdį į koordinačių tiesės taškų aibę. Tas atovaizdis yra apverčiamas: kiekvieną koordinačių tiesės OA (23 pav.) tašką M atitinka konkretus skaičius x_M, tenkinantis sąlygas:



23 pav.

a) $|x_M|$ yra ilgis atkarpos OM, išmatuotos, naudojantis vienetine atkarpa OA;

b) $x_M=|x_M|>0$, kai taškas M yra į dešinę nuo taško O, ir $x_M=-|x_M|<0$, kai taškas M yra į kairę nuo taško O;

c) $x_M=0$, kai taškas M sutampa su tašku O.

[1] Žinoma, čia kalbame apie skaitinę ilgio reikšmę, pasirinkus matavimo vienetą, bet trumpumo dėlei sakome ilgis.

Tas skaičius x_M vadinamas *taško M koordinate.*

Vadinasi, tarp realiųjų skaičių aibės ir koordinačių tiesės taškų aibės elementų yra atitiktis. Tvirtinama, kad ta atitiktis yra abipus vienareikšmė.

Iš to, kas buvo pasakyta, išplaukia, jog realiojo skaičiaus galima neskirti nuo jį atitinkančio taško. Būtent koordinačių tiesės tašką galima laikyti realiuoju skaičiumi (to taško koordinate) ir atvirkščiai, realųjį skaičių – jį atitinkančiu koordinačių tiesės tašku.

Sakykime, M ir N yra du koordinačių tiesės Ox taškai (23 pav.), kurių koordinatės x_M ir x_N; tada atstumas $|MN|$ išreiškiamas tų taškų koordinatėmis pagal formulę

$$|MN| = |x_N - x_M|.$$

Tą formulę įrodysime, pavyzdžiui, kai taškai M ir N yra į dešinę nuo taško O, t.y. $0 < x_M < x_N$. Tada

$$|MN| = |ON| - |OM| = x_N - x_M = |x_N - x_M|.$$

Kitais atvejais, t.y. kai minėti taškai yra į kairę nuo taško O arba skirtingose jo pusėse, ta formulė įrodoma analogiškai.

Pratimai

15. Koordinačių tiesėje pažymėkite taškus, kurių koordinatės yra $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$; 2,1; –1,5. Raskite atstumus tarp tų taškų.

16. Nubrėžkite atkarpas, kurių ilgiai būtų $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ (remkitės Pitagoro teorema).

17. Koordinačių tiesėje pažymėkite taškus, kurių koordinatės yra $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$

7. Skaičių tiesė ir skaičių plokštuma. Remdamiesi praeitame skirsnyje nustatyta abipus vienareikšme realiųjų skaičių ir juos vaizduojančių koordinačių tiesės taškų atitiktimi, realiųjų skaičių aibę galime nagrinėti, vartodami geometrijos terminus. Koordinačių tiese laikysime horizontalią tiesę, teigiama kryptimi – kryptį iš kairės į dešinę. Nagrinėsime du tos tiesės taškus M ir N su koordinatėmis x_M ir x_N. Nelygybę $x_M < x_N$ galėsime aiškinti šitaip: skaičius x_M yra į kairę nuo skaičiaus x_N, nes taškas M yra į kairę nuo taško N. Analogiškai nelygybė $x_M < x_K < x_N$ reikštų, kad skaičius x_K yra tarp skaičių x_M ir x_N. Skaičius $|x_N - x_M|$ ir atstumas tarp taškų M ir N yra vadinami *atstumu tarp skaičių* x_M ir x_N.

Realiųjų skaičių aibė R yra vadinama s k a i č i ų t i e s e, o patys realieji skaičiai – tos tiesės taškais. Priminsime realiųjų skaičių aibės įvairių poaibių (arba skaičių tiesės poaibių) apibrėžimus ir žymėjimus, kurie buvo aštuonmetės mokyklos matematikos kurse.

Skaičių tiesė:

$$R = \{x \in R \mid -\infty < x < +\infty\} =]-\infty;\ +\infty[.$$

Uždaruoju intervalu arba *atkarpa* su pradžios tašku a ir pabaigos tašku b vadinama realiųjų skaičių x aibė:

$$\{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a;\ b].$$

Atviruoju intervalu su pradžios tašku a ir pabaigos tašku b vadinama realiųjų skaičių x aibė:

$$\{x \in R \mid a < x < b\} =]a;\ b[.$$

Pusiau atvirais intervalais vadinamos realiųjų skaičių x aibės:

$$\{x \in R \mid a < x \leqslant b\} =]a;\ b]$$

arba

$$\{x \in R \mid a \leqslant x < b\} = [a;\ b[.$$

Skaičius $b-a$ vadinamas intervalų $[a; b]$, $]a; b[$, $[a; b[$, $]a, b]$ *ilgiu*.

Begaliniais intervalais vadinamos realiųjų skaičių aibės:

$$]a;\ +\infty[= \{x \in R \mid a < x < +\infty\},$$

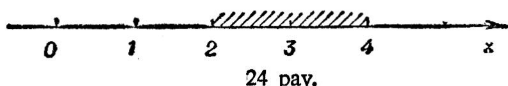
$$[b;\ +\infty[= \{x \in R \mid b \leqslant x < +\infty\},$$

$$]-\infty;\ c] = \{x \in R \mid -\infty < x \leqslant c\},$$

$$]-\infty;\ d[= \{x \in R \mid -\infty < x < d\}.$$

Pavyzdys. Išspręskime nelygybę $|x-3| \leqslant 1$.

$|x-3|$ yra atstumas tarp taškų (skaičių) x ir 3, vadinasi, išspręsti tą nelygybę – reiškia rasti aibę tokių taškų (realiųjų skaičių), kurių atstumas iki taško 3 ne didesnis kaip 1. Vieneto atstumu nuo taško 3 į kairę yra taškas 2, o į dešinę – taškas 4 (nes $4-3=1$ ir $3-2=1$); mažesniu kaip 1 atstumu nuo taško 3 yra taškai tarp 2 ir 4 (žr. 24 pav.). Taigi duotosios nelygybės sprendinių aibė yra atkarpa $[2; 4]$.



24 pav.

Anksčiau buvo nurodyta, kad tarp realiųjų skaičių aibės ir tiesės taškų aibės yra abipus vienareikšmė atitiktis. Analogiškai tarp realiųjų skaičių sutvarkytų porų ir koordinačių plokštumos taškų taip pat yra abipus vienareikšmė atitiktis. Todėl tikslinga realiųjų skaičių sutvarkytų porų aibę vadinti *skaičių plokštuma*, o bet kurią sutvarkytą porą – *skaičių plokštumos tašku*. Skaičių plokštumą žymėsime simboliu R^2 (skaitoma „er du"). Kaip ir skaičių tiesėje, skaičių plokštumoje galima vartoti geometrijos terminologiją. Pavyzdžiui, porų $(x; y) \in R^2$, kurių koordinatės tenkina lygtį $y=x$, aibė yra tiesė – I ir III koordinatinių kampų pusiaukampinė. Taškų $(x; y) \in R^2$, kurių koordinatės tenkina lygtį $y=x^2$, aibė yra kvadratinė parabolė.

Pavyzdys. Geometrine kalba aprašykime aibę

$$A = \{(x;\ y) \in R^2 \mid (x+1)(y-2) = 0\}.$$

Kadangi

$$(x+1)(y-2)=0 \Leftrightarrow (x+1=0) \vee (y-2=0) \Leftrightarrow x=-1 \vee y=2,$$

tai duotoji aibė yra tiesių $x=-1$ ir $y=2$ taškų aibių sąjunga.

Pratimai

18. Kuris iš dviejų taškų koordinačių tiesėje yra labiau į kairę, o kuris labiau į dešinę, kai tų taškų koordinatės yra:

a) $2,3434\ldots$ ir $2,3443\ldots$;

b) $\bar{1},001\ldots$ ir $\bar{1},010\ldots$;

c) 0 ir $\bar{1},56\ldots$;

d) $15,55\ldots$ ir $15\frac{5}{9}$;

e) $2,34\ldots$ ir $\bar{3},345\ldots$?

19. Kuris iš dviejų taškų koordinačių tiesėje yra toliau nuo pradžios taško 0, kai tų taškų koordinatės yra:

a) $4,783\ldots$ ir $4,793\ldots$;

b) $3,5678\ldots$ ir $2,7893\ldots$;

c) $\overline{13},001\ldots$ ir $\overline{13},100\ldots$;

d) $-15,004\ldots$ ir $-15,040\ldots$;

e) $-0,20\ldots$ ir $-0,30\ldots$?

20. Koordinačių tiesėje nurodykite aibes taškų, kurių koordinatės tenkina sąryšius:

a) $|x|=2$; b) $|x|\leqslant 3$; c) $|x|\geqslant 8$; d) $|x|>9$;

e) $|x|=\sqrt{3}$; f) $|x|>\sqrt{2}$; g) $|x|\leqslant\sqrt{5}$; h) $|x|\geqslant\frac{\sqrt{7}}{3}$.

21. Raskite atstumą tarp taškų:

a) $M(1;\ 2)$ ir $N(2;\ 0)$; b) $M(0;\ 3)$ ir $N(-0;\ 3)$;

c) $M(7)$ ir $N(0)$; d) $M(-1;\ 3)$ ir $N(0;\ 0)$;

e) $M(-1;\ 8)$ ir $N(-1;\ 9)$.

22. Raskite sprendinių aibę:

a) $|x-2|=3$; b) $|x-2|\leqslant 3$; c) $|13-x|=1$;

d) $|13-x|\geqslant 4$; e) $|x+4|=5$; f) $|x+4|\geqslant 5$.

23. Raskite sprendinių aibę:

a) $\frac{x-4}{x+3}\leqslant 0$; b) $\frac{x+3}{x-5}>0$;

c) $\frac{1-x}{x+7}<0$; d) $\frac{4-x}{x-8}\geqslant 0$.

24. Sakinį, kuriame yra kintamasis, užrašykite kaip lygtį arba nelygybę ir raskite aibę to kintamojo reikšmių, su kuriomis sakinys yra teisingas:

a) atstumas tarp koordinačių tiesės taškų $M(x)$ ir $N(4)$ lygus 5;

b) atstumas tarp koordinačių tiesės taškų $M(x)$ ir $N(-3)$ yra mažesnis kaip 2;

c) atstumas tarp koordinačių tiesės taškų $M(x)$ ir $N(1)$ yra ne didesnis kaip 0,5;

d) atstumas tarp koordinačių tiesės taškų $M(-4)$ ir $N(x)$ yra ne mažesnis kaip $\frac{1}{5}$.

25. Nusakykite geometrine kalba ir pavaizduokite koordinačių plokštumoje šias aibes:

a) $\{(x;\ y) \in R^2 \mid (x-3)(y-3)=0\}$;

b) $\{(x;\ y) \in R^2 \mid (x+4)(y+5)=0\}$;

c) $\left\{(x;\ y) \in R^2 \,\middle|\, \frac{x-y}{y-1}=0\right\}$;

d) $\{(x;\ y) \in R^2 \mid x>0,\ y\leqslant 0\}$;

e) $\{(x;\ y) \in R^2 \mid x>0,\ y\leqslant 5\}$;

f) $\{(x;\ y) \in R^2 \mid x<0,\ y\geqslant -2\}$.

III SKYRIUS

Funkcijos. Sekos. Ribos

§ 9. ATITIKTYS IR FUNKCIJOS

1. Atitiktys. Viena iš svarbiausiųjų matematikos sąvokų yra funkcijos sąvoka. Įvairiomis funkcijomis galima išreikšti begalinę realiojo pasaulio procesų ir reiškinių įvairovę. Todėl funkcijos sąvoka yra svarbi pasaulio pažinimo priemonė. Joje ryškiausiai įsikūnija materialistinė matematikos prigimtis, glaudus jos ryšys su įvairiais realios tikrovės reiškiniais.

Aštuonmetės mokyklos matematikos kurse jūs jau susipažinote su funkcijos apibrėžimu, su kai kurių funkcijų vaizdavimu rodykline schema, grafiku, su funkcijos reiškimo būdais ir su kai kuriomis konkrečiomis funkcijų rūšimis (tiesine, kvadratine, logaritmine ir t.t.).

Panagrinėsime tuos svarbius klausimus dar kartą.

Sakykime, yra dvi aibės: aibė A, kurią sudaro trys moksleiviai (Kolia; Tania; Lena), ir aibė B, kurią sudaro keturi miestai (Maskva; Leningradas; Odesa; Kurskas). Tų aibių tiesioginę sandaugą $A \times B$ sudarys visos (mokinys; miestas) pavidalo poros, o jų bus 12.

Išnagrinėkime kokį nors tiesioginės sandaugos $A \times B$ poaibį C.

Pavyzdžiui, iš aibės $A \times B$ imsime tik tas poras, kurios „sieja" kiekvieną mokinį su miestu, kuriame jis yra buvęs. Akivaizdu, kad tokių porų (mokinys — miestas, kuriame jis yra buvęs) „sąrašas" bus tiesioginės sandaugos $A \times B$ poaibis.

Sakykime, aibę C sudaro šios poros: (Kolia, Maskva), (Kolia, Leningradas), (Lena, Odesa).

Dabar galime sakyti, kad tarp aibių A ir B elementų yra tam tikra atitiktis.

Aibė A yra vadinama atitikties *išeities sritimi*, aibė B — atitikties *paskirties sritimi*. Aibė, kurią sudaro visų aibės C porų pirmieji komponentai, vadinama atitikties *apibrėžimo sritimi*; aibė, kurią sudaro visų aibės C porų antrieji komponentai, vadinama atitikties *reikšmių aibe*.

Šiame pavyzdyje atitikties išeities sritis yra aibė, kurią sudaro visi trys išvardytieji moksleiviai; paskirties sritis — aibė, kurią sudaro visi keturi išvardytieji miestai. Atitikties apibrėžimo sritis yra aibė visų moksleivių, išskyrus Tanią, nė karto nebuvusią nė viename iš išvardytų miestų; reikšmių aibė — aibė visų miestų, išskyrus Kurską, kuriame nė vienas moksleivis nėra buvęs. Akivaizdu, kad vardas Tania ir miesto pavadinimas Kurskas nebus vartojami, sudarant aibės C poras.

Atitiktis gali būti ne tik tarp dviejų aibių, bet ir tarp kokios nors aibės A elementų. Žinoma, tuo atveju aibė C bus Dekarto kvadrato $A \times A$ poaibis.

Sakykime, pavyzdžiui, $A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Sudarykime Dekarto kvadratą $A \times A$ ir iš jo išskirkime tokias skaičių poras, kad antrasis poros komponentas dalytųsi iš pirmojo:

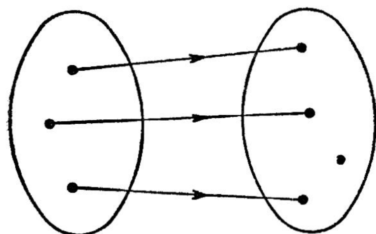
$$C = \{(2;\ 2);\ (3;\ 3);\ (4;\ 4);\ (5;\ 5);\ (6;\ 6);\ (2;\ 4);\ (2;\ 6);\ (3;\ 6)\}.$$

Šiuo atveju išeities ir paskirties sritys sutampa.

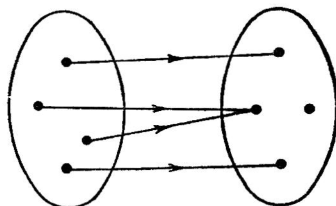
2. Funkcijos. Iš visų galimų atitikčių išskirkime tokias, kurioms

1) išeities sritis sutampa su apibrėžimo sritimi;

2) nėra porų su vienodais pirmaisiais ir skirtingais antraisiais elementais (25, 26 pav.). Tokios atitiktys yra vadinamos funkcijomis.



25 pav.



26 pav.

Imkime mokinių aibę (A), miestų aibę (B) ir sudarykime poras „mokinys — miestas, kuriame jis gimė“. Tą atitiktį išreikškime lentele.

A	*B*				
	Maskva	Leningradas	Kijevas	Odesa	Jaroslavlis
Kolia		×			
Tolia	×				
Saša					×
Tania			×		

Nesunku pastebėti, kad kiekvienoje lentelės eilutėje yra tik vienas kryželis, nes kiekvienas mokinys yra gimęs tik vienoje vietoje (ji ir nurodyta).

Viename lentelės stulpelyje (atitinkančiame miestą Odesa) kryželio nėra (tame mieste negimė nė vienas iš išvardytų moksleivių). Nesunku įsitikinti, kad ta atitiktis tenkina abi anksčiau suformuluotas sąlygas.

Taigi aibių A ir B atitiktis yra vadinama *funkcija*, jeigu kiekvienas aibės A elementas yra suporuotas su vieninteliu aibės B elementu.

Tuo atveju aibė A vadinama *funkcijos apibrėžimo sritimi*. Vietoj termino „paskirties aibė“ (aibei B) yra sakoma „funkcija įgyja reikšmes iš aibės B“.

Funkcija dažnai žymima simboliais f, φ, ψ ir t.t.

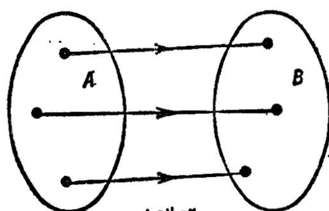
Funkcija f su apibrėžimo sritimi A ir reikšmėmis iš B yra žymima $f: A \to B$.

Sakykime, x yra bet koks aibės A elementas, o y – aibės B elementas. Elementas y, suporuotas su elementu x, yra žymimas $f(x)$ ir vadinamas *funkcijos reikšme*.

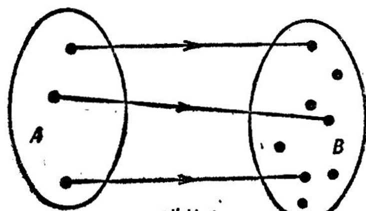
Aibė visų $y \in B$, kurie yra funkcijos f reikšmės, vadinama *funkcijos reikšmių aibe*.

Dažnai funkcija f žymima ir šitaip: $y=f(x)$, $x \in A$. Tada x vadinamas *argumentu*, o y – *funkcijos reikšme*. Funkcijos apibrėžimo sritis dar vadinama *argumento reikšmių sritimi*.

Žymėjimas $y=f(x)$, $x \in A$ yra labai patogus, skaičiuojant funkcijos reikšmes.



27 pav.



28 pav.

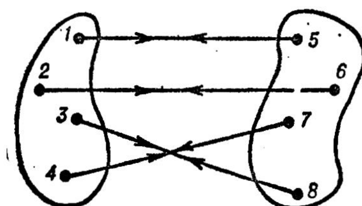
Pavyzdžiui, jeigu $f(x)=x^2$, $x \in R$, tai $f(5)=25$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ ir t.t.

Prisiminkime, kad geometrijoje funkcija yra vadinama atovaizdžiu. Skiriamos dvi atovaizdžių rūšys: kokios nors aibės A atovaizdis *į aibę B* (27 pav.) ir aibės A atovaizdis *aibėje B* (28 pav.).

Terminų „į aibę" ir „aibėje" prasmė šiuo atveju yra ypatinga. Pirmuoju atveju atitikties paskirties sritis ir jos reikšmių sritis sutampa (aibėje B nėra „laisvų" elementų); antruoju atveju atitikties reikšmių aibė yra jos paskirties srities poaibis (aibėje B gali būti laisvų elementų).

Ir tuo, ir kitu atveju aibėje A laisvų elementų, netenkinančių duoto funkcinio sąryšio, nėra.

Iš atovaizdžių (arba funkcijų) reikia išskirti vadinamuosius *abipus vienareikšmius* (apverčiamus) vienos aibės atovaizdžius į kitą.



29 pav.

Tokiems atovaizdžiams būdinga tai, kad porose su skirtingais pirmaisiais elementais skiriasi ir antrieji elementai, o porose su skirtingais antraisiais elementais skiriasi pirmieji (29 pav.).

Apverčiami plokštumos atovaizdžiai į save yra vadinami geometrinėmis tos plokštumos transformacijomis.

3. Skaitinės funkcijos. Atitiktys gali būti apibrėžtos įvairiausiose aibėse, taigi ir funkcijos, kaip atskiro atitikties atvejo, apibrėžimo sritis ir reikšmių aibė gali būti įvairios aibės, pavyzdžiui, žmonių, daiktų, įvykių, skaičių, taškų ir t.t.

Mokykliniame matematikos kurse dažniausiai nagrinėjamos vadinamosios skaitinės funkcijos.

Sakykime, duota funkcija $f: A \to B$. Jeigu aibės A ir B yra skaitinės, t.y. $A \subset R$ ir $B \subset R$, tai funkcija f vadinama *skaitine funkcija.*

Skaitinė funkcija f yra apibrėžta, jeigu duotos aibės A ir B ir nurodyta, kaip sudaroma aibė $C \subset A \times B$, t.y. kaip bet kokiam $x \in A$ galima rasti (apskaičiuoti) jį atitinkantį $y \in B$.

Todėl daugelis algebrinių reiškinių su vienu kintamuoju x, $x \in R$, reiškia skaitinę funkciją.

Tokie, pavyzdžiui, yra reiškiniai $2x+3$, kai $x \in R$; $\frac{x^2+1}{x-1}$, kai $x \in \{x \in R \mid x \neq 1\}$, ir t.t.

Žinome, kad kiekvieną kintamojo x reikšmę iš reiškinio apibrėžimo srities atitinka skaičius, vadinamas duotojo reiškinio *skaitine reikšme*, atitinkančia duotąją argumento reikšmę; jis yra nurodytų operacijų rezultatas:

$$f(x)=2x+3 \text{ arba } f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}.$$

Jeigu su kokiomis nors x reikšmėmis skaičiavimų atlikti negalima, tai tos reikšmės nepriklauso apibrėžimo sričiai, t.y. funkcija tokioms x reikšmėms yra neapibrėžta.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ yra neapibrėžta, kai $x=1$; funkcija $f(x)=\sqrt{x-1}$ neapibrėžta, kai $x<1$.

Kadangi funkcijos reikšmės yra žymimos y, tai skaitinės funkcijos dažnai užrašomos šitaip:

$$y=2x+3, \quad x \in R;$$

$$y=\frac{x^2+1}{x-1}, \quad x \in R, \quad x \neq 1.$$

Išnagrinėtosios funkcijos buvo apibrėžtos, naudojantis algebrinėmis operacijomis. Tačiau yra daug skaitinių funkcijų, kurios išreiškiamos kitaip. Išnagrinėsime vieną iš jų.

Kiekvieną skaičių x galima užrašyti kaip baigtinę arba begalinę dešimtainę trupmeną, pavyzdžiui, 0,274; 0,333...; 1; 1,5; 3,141592...; 1,274; 1,5.

Sakykime, kiekvienam skaičiui x priskiriamas sveikasis skaičius, kuris lieka, užbraukus trupmeninę dalį. Tokiu būdu yra apibrėžiama skaitinė funkcija, nes kiekvieną skaičių x, remiantis apibrėžimu, atitinka vienintelis sveikasis skaičius. Tas skaičius vadinamas sveikąja x dalimi ir žymimas $[x]$. Lentelėje pateiktos kelios tos funkcijos reikšmės.

x	$\bar{1},274$	0,333...	1	1,5	3,141592...
$[x]$	−1	0	1	1	3

4. Funkcijos reiškimo būdai. Prisiminsime, kokiais būdais dažniausiai išreiškiama funkcija (atovaizdis).

Norint nusakyti aibės A atovaizdį aibėje B (arba funkciją, apibrėžtą aibėje A su reikšmėmis iš aibės B), užtenka nurodyti, kaip kiekvienam $x \in A$ rasti jį atitinkantį aibės B elementą.

Jeigu aibė A yra baigtinė, tai funkciją galima išreikšti, išrašant visus aibės C elementus (visas poras) – funkciją galima užrašyti kaip lentelę.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=x^2$, kurios apibrėžimo sritis yra aibė

$$A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\},$$

gali būti išreikšta šitaip:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	1	4	9	16	25	36	49

Šis metodas plačiai taikomas praktikoje. Pavyzdžiui, meteorologai sudaro kritulių įvairiose Žemės rutulio vietose (taškuose) lenteles. Žemės rutulio taškai šiuo atveju yra argumento reikšmės, o kritulių kiekis — funkcijos reikšmės.

Skaitinės funkcijos dažniausiai išreiškiamos vadinamuoju analiziniu būdu.

Tas būdas yra patogesnis, kai aibė A begalinė. Šiuo atveju reikia nurodyti funkcijos apibrėžimo sritį (aibę A) ir suformuluoti dėsnį (užrašyti formulę), pagal kurį kiekvienam $x \in A$ yra priskiriamas jį atitinkantis $y \in R$.

Pavyzdžiui, funkcija $y=x^2$, $x \in R$, yra išreikšta analiziškai.

Pabrėšime, kad ta pati formulė gali nusakyti įvairias funkcijas, žiūrint kokia yra aibė A.

Funkcijos

$$y=x^2,\quad x \in]-\infty;\ +\infty[,\ \text{ir}\ y=x^2,\quad x \in N,$$

yra skirtingos; pirmoji – kvadratinė funkcija, antroji – seka skaičių 1; 4; 9; 16; ...; n^2; ...

Jeigu skaitinė funkcija, išreiškiama formule $y=f(x)$, yra apibrėžta aibėje tų kintamojo x reikšmių, kurioms reiškinys $f(x)$ turi prasmę, tai jos apibrėžimo sritis paprastai nenurodoma.

Pavyzdžiui, jeigu skaitinė funkcija $f(x)=x^2-5x+6$ yra apibrėžta visiems $x \in R$, tai ji paprastai užrašoma formule, nenurodant apibrėžimo srities; jeigu funkcija $f(x)=x^2-5x+6$ yra apibrėžta kuriame nors aibės R poaibyje, tai tas faktas yra pabrėžiamas. Jeigu funkcija išreikšta formule $y=\frac{4}{x-3}$, nenurodant jos apibrėžimo srities, tai turima omenyje, kad tos funkcijos apibrėžimo sritis yra aibė visų realiųjų skaičių, išskyrus 3 (kai $x=3$, reiškinys $\frac{4}{x-3}$ neturi prasmės).

Kartais skaitinės funkcijos įvairiuose skaičių intervaluose yra išreiškiamos įvairiomis formulėmis.

Tokia, pavyzdžiui, yra funkcija

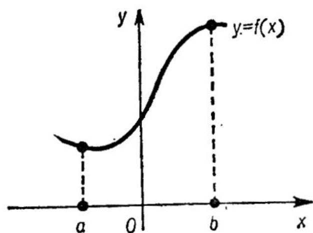
$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x \in R, \quad x<0, \\ x^2, & x \in R, \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Tais atvejais, kai formulę, pagal kurią kiekvienam $x \in A$ priskiriamas $y \in R$, sudėtinga (arba negalima) užrašyti, funkcija nusakoma žodžiais. Taip, pavyzdžiui, yra nusakyta ankstesniame skirsnyje funkcija $[x]$.

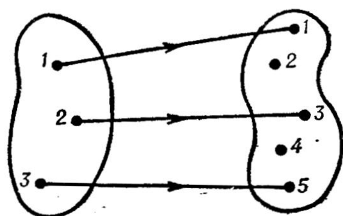
Be analizinio būdo, praktikoje funkcija dažnai yra reiškiama geometriškai (arba grafiškai). Tas būdas patogus, kai analiziškai išreikšti funkciją gana sunku. Be to, nagrinėjant daugelį procesų, naudojami prietaisai, kurie negali „kalbėti“ formulių kalba. Tačiau tais prietaisais gaunamos kreivės, iš kurių galima spręsti apie nagrinėjamą funkciją.

Pavyzdžiui, medicinoje plačiai naudojami elektrokardiografai, kuriais užrašomos elektrokardiogramos — kreivės, vaizduojančios elektrinių impulsų širdies raumenyje kitimą. Iš tų kreivių gydytojas daro teisingas išvadas apie ligonio širdies darbą.

Geometriniu būdu funkcijos dažnai išreiškiamos ir matematikoje, kai norima pailiustruoti kai kurias jų savybes.



30 pav.



31 pav.

Skaitinė funkcija f yra visiškai apibrėžta, jeigu duota porų aibė $C=\{(x;\ y) \mid y=f(x)\}$, kuri yra aibės $R \times R$, t.y. skaičių (koordinačių) plokštumos, poaibis.

Tos aibės vaizdas koordinačių plokštumoje yra vadinamas duotosios funkcijos f grafiku.

Vadinasi, norint nusakyti funkciją geometriškai, reikia nusakyti (nubrėžti) jos grafiką (30 pav.).

Natūralu, kad funkcija, būdama atitiktis, gali būti išreikšta rodykline schema arba grafu. Pavyzdžiui, funkcija $y=2x-1$, kurios apibrėžimo sritis yra pirmųjų trijų natūrinių skaičių aibė, gali būti išreikšta 31 paveiksle pavaizduota rodykline schema.

5. Funkcija, atvirkštinė duotajai. Aštuonmetės mokyklos matematikos kurse susipažinote su atvirkštinės atitikties ir funkcijos, atvirkštinės duotajai, sąvokomis.

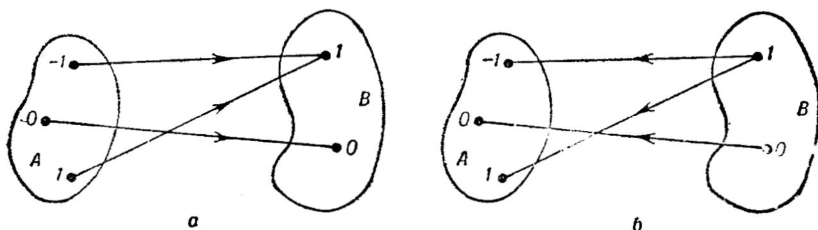
Geometrijos kurse nagrinėjote įvairius plokštumos atvaizdavimus į save (posūkius, simetrijas, vektorius).

Prisiminsime, kas buvo svarbiausia.

Pradėsime nuo pavyzdžių.

1 pavyzdys. Sakykime, aibėje $A=\{-1;0;1\}$ duota funkcija $f(x)=x^2$. Tada $B=\{0; 1\}$ yra tos funkcijos reikšmių aibė.

Tą funkcinį sąryšį galima pavaizduoti rodykline schema (32 pav., *a*).



32 pav.

Sudarysime rodyklinę schemą atitikties, atvirkštinės duotajai, t.y. sukeisime aibių A ir B vaidmenis (rodyklinėje schemoje užtenka rodyklių kryptis pakeisti priešingomis). Tai pavaizduota 32 pav., *b*.

Gautoji atitiktis, atvirkštinė duotajai, nėra funkcija.



33 pav.

2 pavyzdys. Aibėje $A=\{-1; 0; 1\}$ yra apibrėžta funkcija $f(x)=$ $=x+1$.

Tos funkcijos reikšmių aibė yra $B=\{0; 1; 2\}$.

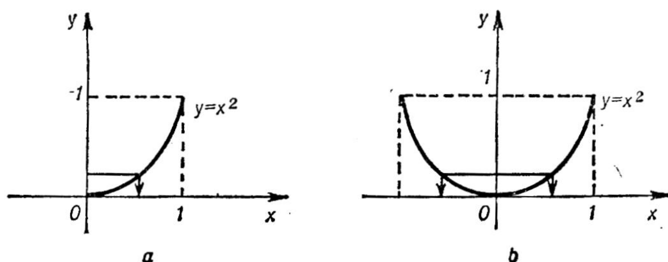
Šią atitiktį ir jai atvirkštinę atitiktį pavaizduosime rodyklinėmis schemomis (33 pav.). Matome, kad ir duotoji, ir jai atvirkštinė atitiktis yra funkcijos.

3 pavyzdys. Duota mokinių aibė (A) ir portfelių aibė (B), aibėje A yra nusakytas funkcinis sąryšis „turi".

Tarp tų dviejų aibių yra abipus vienareikšmė atitiktis (t.y. kiekvieną mokinį iš aibės A atitinka tik vienas portfelis iš aibės B ir atvirkščiai), todėl funkcijai f – „turi" egzistuoja atvirkštinė funkcija φ – „priklauso".

4 pavyzdys. Atitiktis, atvirkštinė atitikčiai (funkcijai) $f(x)=x^2$, kai $x\in[0; 1]$, taip pat yra funkcija (34 pav., *a*); atitiktis, atvirkštinė funkcijai $f(x)=x^2$, kai $x\in[-1; 1]$, jau nėra funkcija (34 pav., *b*).

Funkcija f vadinama *apverčiama*, jeigu atitiktis φ, atvirkštinė duotajai, taip pat yra funkcija. Tuo atveju f ir φ vadinamos *abipus atvirkštinėmis* funkcijomis, o φ vadinama funkcijos f *atvirkštine* funkcija ir žymima f^{-1}.



34 pav.

Sakykime, A yra funkcijos f apibrėžimo sritis, o B – jos reikšmių aibė. Remiantis apibrėžimu, iš sąryšių $y=f(x)$, $x\in A$, išplaukia $x=f^{-1}(y)$, $y\in B$. Be to, jeigu $x_1\neq x_2$, tai $y_1\neq y_2$ ir atvirkščiai (čia $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$), t.y. skirtingas x reikšmes atitinka skirtingos y reikšmės ir skirtingas y reikšmes atitinka skirtingos x reikšmės.

Aišku, f^{-1} apibrėžimo sritis yra f reikšmių aibė, o f^{-1} reikšmių aibė yra f apibrėžimo sritis.

Jeigu skaitinė funkcija f analiziškai išreikšta formule $y=f(x)$, tai ta formulė yra lygtis su dviem kintamaisiais x ir y. Kiekviena tokia lygtis rodo dvi abipus atvirkštines atitiktis: vieną tarp aibės A (kintamojo x reikšmių) ir aibės B (kintamojo y reikšmių), o kitą – tarp aibių B ir A.

Sakykime, duota apverčiama funkcija $y=f(x)$, $x\in A$. Norint gauti aibę porų $(y; x)$, apibrėžiančių atvirkštinę funkciją f^{-1}, užtenka išspręsti lygtį $y=f(x)$ kintamojo x atžvilgiu (jeigu tai yra galima) – išreikšti kintamąjį x kintamuoju y : $x=f^{-1}(y)$.

Pavyzdys. Raskite funkciją, atvirkštinę funkcijai

$$y=\frac{2x-1}{3},\quad x\in[2;\ 5].$$

Iš lygties $y=\frac{2x-1}{3}$ išreiškę x kintamuoju y, gausime $x=\frac{3y+1}{2}$.

Sukeitę žymėjimus vietomis, turėsime funkciją $y=\frac{3x+1}{2}$, $x\in[1; 3]$, atvirkštinę duotajai.

Jeigu funkcijos f apibrėžimo sritis ir jos reikšmių sritis sutampa, o funkcija f yra apverčiama (t. y. $f: A \to A$ ir $f^{-1}: A \to A$), tai bet kokiam $x \in A$

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x,$$

t.y. atovaizdžių f ir f^{-1} kompozicija yra tapatus atvaizdavimas.

Pastebėsime, kad abipus atvirkštinių funkcijų $y = f(x)$ ir $y = f^{-1}(x)$ grafikai visada yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

6. Lyginės ir nelyginės funkcijos. Funkcija f, apibrėžta srityje A, yra vadinama *lygine*, jeigu, imant bet kokį $x \in A$, reikšmė $-x$ taip pat priklauso A ir yra teisinga lygybė $f(-x) = f(x)$.

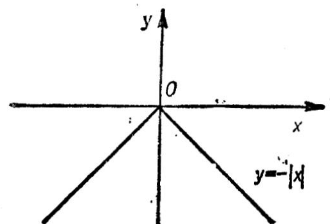
Lyginės yra funkcijos

$$f(x) = x^2 + 2, \quad f(x) = |x| + 1,$$

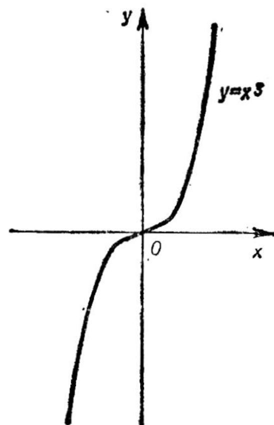
$$f(x) = -|x|, \quad f(x) = 2^x + 2^{-x},$$

apibrėžtos visoje skaičių tiesėje, ir funkcija $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, apibrėžta atkarpoje $[-1;\ 1]$.

Pažymėsime, kad lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu (žr. 35 pav.). Ta lyginės funkcijos savybe galima remtis,



35 pav.



36 pav.

braižant jos grafiką: galima nubraižyti tik grafiko dalį, kai $x \geq 0$, ir gautą kreivę simetriškai atspindėti ordinačių ašies atžvilgiu.

Funkcija f, apibrėžta srityje A, vadinama *nelygine*, jeigu, imant bet kokį $x \in A$, reikšmė $-x$ taip pat priklauso A ir yra teisinga lygybė $f(-x) = -f(x)$.

Nelyginės yra funkcijos

$$f(x) = x^3, \quad f(x) = x \cdot |x|, \quad f(x) = 2^x - 2^{-x},$$

apibrėžtos visoje skaičių tiesėje, ir funkcija $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$, apibrėžta $x \in [-1;\ 1]$.

Nelyginės funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu (pavyzdžiui, 36 pav.). Ta nelyginės funkcijos savybe galima remtis, braižant jos grafiką: galima nubrėžti grafiko dalį, kai $x \geqslant 0$, ir ją simetriškai atspindėti koordinačių pradžios atžvilgiu.

Skaičių aibę A vadinsime *simetriška koordinačių pradžios atžvilgiu*, jeigu tai aibei kartu su x priklauso ir jam priešingas skaičius $-x$.

Tokių aibių pavyzdžiai gali būti intervalai $[-a; a]$, aibė $\{-4; -2\} \cup \{2; 4\}$, racionaliųjų skaičių aibė Q ir t.t.

Remiantis apibrėžimu, funkcija $y=f(x)$, $x \in A$, yra lyginė arba nelyginė tik tada, kai jos apibrėžimo sritis A simetriška koordinačių pradžios atžvilgiu. Aišku, vien tos sąlygos neužtenka. Tuo nesunkiai galima įsitikinti, išnagrinėjus, pavyzdžiui, funkciją $f(x)=x+1$, apibrėžtą visoje skaičių tiesėje. Ji nėra nei lyginė, nei nelyginė, nors jos apibrėžimo sritis yra aibė, simetriška koordinačių pradžios atžvilgiu.

7. Periodinės funkcijos. Funkcija f, apibrėžta srityje A, yra vadinama *periodine*, jeigu egzistuoja toks skaičius $l \neq 0$, kad kiekvienam $x \in A$ skaičiai $x-l$ ir $x+l$ taip pat priklauso A ir yra teisinga lygybė

$$f(x-l)=f(x)=f(x+l).$$

Tuo atveju skaičius l yra vadinamas funkcijos f *periodu*.

Jeigu skaičius l yra funkcijos f periodas, tai akivaizdu, kad jos periodai bus taip pat skaičiai nl, n – bet koks sveikasis skaičius, išskyrus 0.

Išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

1) Sakykime, $f(x)=x-[x]$ yra trupmeninė skaičiaus dalis.

Priminsime, kaip apskaičiuojamos tos funkcijos reikšmės:

$$\{5,32\}=5,32-5=0,32,$$

$$\{1,32\}=1,32-1=0,32,$$

$$\{0,32\}=0,32-0=0,32,$$

$$\{-3,21\}=-3,21-(-4)=-3,21+4=0,79,$$

$$\{-0,21\}=0,21-(-1)=-0,21+1=0,79,$$

$$\{-6,21\}=-6,21-(-7)=0,79.$$

Prie x pridėję bet kokį sveikąjį skaičių a, gausime:

$$\{x+a\}=(x+a)-[(x+a)]=(x+a)-[x]-a=x-[x]=\{x\}.$$

Vadinasi, funkcija $f(x)=\{x\}$ yra periodinė ir jos periodas yra bet koks sveikasis skaičius.

Dažniausiai imamas mažiausias teigiamas funkcijos f periodas (kai kalbama tiesiog apie funkcijos periodą, tai paprastai ir turimas omenyje mažiausias teigiamas periodas, jeigu tik jis egzistuoja).

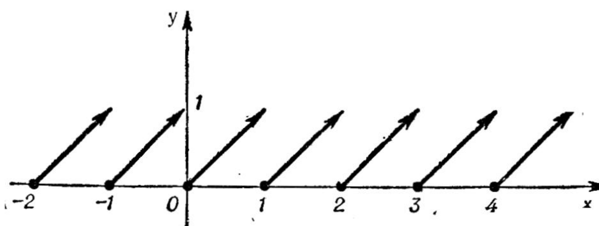
Galima įrodyti, kad bet kuris funkcijos f periodas yra randamas iš formulės $l=nl_0$, l_0 – mažiausias teigiamas jos periodas ir n – sveikasis skaičius, nelygus 0.

Aišku, pateiktame pavyzdyje mažiausias teigiamas periodas yra 1.

2) Nagrinėsime Dirichlė funkciją (pavadintą vokiečių matematiko P. Leženo-Dirichlė (1805—1859) vardu):

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ kai } x - \text{racionalusis skaičius,} \\ 0, \text{ kai } x - \text{iracionalusis skaičius.} \end{cases}$$

Kiekvienas racionalusis skaičius r yra tos funkcijos periodas. Iš tikrųjų, jeigu x yra racionalusis skaičius, tai skaičiai $x+r$ ir $x-r$ — taip pat racionalieji; jeigu x — iracionalusis skaičius, tai $x+r$ ir $x-r$ — taip pat iracionalieji. Taigi $f(x+r)=f(x)$, todėl Dirichlė funkcija yra periodinė. Tačiau tarp teigiamų racionaliųjų skaičių r nėra mažiausio, todėl Dirichlė funkcija turi begalinę periodų aibę, bet neturi mažiausio teigiamo periodo. Tad nereikia manyti, jog kiekviena periodinė funkcija turi mažiausią teigiamą periodą. Iš periodinės funkcijos apibrėžimo išplaukia, kad jos grafikas „kartosis" kas intervalas, kurio ilgis lygus mažiausiam teigiamam periodui l_0. Taigi, jeigu funkcija $y=f(x)$ turi mažiausią teigiamą periodą l_0, užtenka nubraižyti jos grafiką bet kuriame uždarajame intervale $a \leqslant x \leqslant a+l_0$. Stumdami tą grafiką išilgai abscisių ašies ilgio l_0 atkarpomis, gausime funkcijos $y=f(x)$ grafiką.



37 pav.

Pavyzdžiui, užtenka nubraižyti funkcijos $y=\{x\}$ grafiką atkarpoje $0 \leqslant x \leqslant 1$ (jos periodas lygus 1), po to, stumiant jį išilgai abscisių ašies, gauti tos funkcijos grafiką (37 pav.).

§ 10. SEKOS

1. Skaičių sekos. Aštuonmetės mokyklos matematikos kurse jaus usipažinote su begalinėmis ir baigtinėmis skaičių sekomis. VIII klasėje nagrinėtos aritmetinė ir geometrinė progresijos yra skaičių sekų pavyzdžiai. Pavyzdžiui, aritmetinė progresija, kurios pirmasis narys $a_1=1$ ir skirtumas $d=1$, yra begalinė skaičių seka

$$1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n;\ \ldots$$

Analogiškai geometrinė progresija, kurios pirmasis narys $a_1=1$ ir vardiklis $q=\frac{1}{2}$, t.y. progresija

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots;\ \frac{1}{2^{n-1}};\ \ldots,$$

taip pat yra begalinė seka.

Šiame matematikos kurse taip pat jau susidūrėme su skaičių sekomis, pavyzdžiui, nagrinėdami realiųjų skaičių aibę. Su neneigiamu realiuoju skaičiumi

$$\alpha = a_0,\ a_1 a_2 \ \ldots\ a_n \ \ldots$$

buvo susijusios šitokios sekos:

a) jo dešimtainių ženklų seka

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots;$$

b) dešimtainių artinių su trūkumu seka

$$\alpha_1 = a_0,\ a_1;\ \alpha_2 = a_0,\ a_1 a_2;\ \ldots;$$

$$\alpha_n = a_0,\ a_1 a_2 \ \ldots\ a_n;\ \ldots;$$

c) dešimtainių artinių su pertekliumi seka

$$\alpha'_1 = a_0,\ a_1 + \frac{1}{10};\ \alpha'_2 = a_0,\ a_1 a_2 + \frac{1}{10^2};\ \ldots;$$

$$\alpha'_n = a_0,\ a_1 a_2 \ \ldots\ a_n + \frac{1}{10^n};\ \ldots$$

Pateiktieji pavyzdžiai rodo, kad skaičių seka išreiškiama, nusakant atitiktį, priskiriančią kiekvienam natūriniam skaičiui n (numeriui) vienintelį realųjį skaičių $f(n)$ (n-ojo sekos nario reikšmę). Kaip žinoma, tokia atitiktis yra funkcija, kurios apibrėžimo sritis – visų natūrinių skaičių aibė N.

Apibrėžimas. *Begaline skaičių seka* vadinama skaitinė funkcija f, apibrėžta visų natūrinių skaičių aibėje.

Taigi bendruoju atveju begalinė seka užrašoma šitaip:

$$f(1);\ f(2);\ \ldots;\ f(n);\ \ldots,$$

o jeigu pažymėsime $a_n = f(n)$, tai

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots,\ \text{arba}\ (a_n)^1.$$

Toliau vartosime ir šitokį žymėjimą: a_n, $n \in N$. Skaičius a_1 yra *pirmasis sekos narys*, a_2 – *antrasis*, ..., a_n – *n-asis* (*bendrasis*) *sekos narys*, o skaičiai 1, 2, ..., n, ... – atitinkamų sekos narių numeriai.

Priminsime pagrindinius būdus, kuriais yra išreiškiama begalinė seka.

1. Seka gali būti išreikšta formule, rodančia, kaip pagal numerį n (sekos nario numerį) apskaičiuoti sekos narį a_n (t.y. to numerio narį).

1 pavyzdys. Nagrinėsime seką (a_n), išreikštą formule

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2},\ n \in N.$$

[1] Vadovėliuose ir mokslinėje literatūroje seka yra žymima ir $\{a_n\}$.

Pagal šią formulę galima apskaičiuoti bet kurį sekos narį, pavyzdžiui,

$$a_1=\frac{1+(-1)^1}{2}=\frac{1-1}{2}=0,\quad a_2=\frac{1+(-1)^2}{2}=\frac{1+1}{2}=1,$$

$$a_3=\frac{1+(-1)^3}{2}=\frac{1-1}{2}=0 \text{ ir t. t.}$$

Taigi ta seka yra 0; 1; 0; 1; ...

Susitarsime vietoj žodžių „nagrinėsime seką (a_n), išreikštą formule $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$, $n\in N$“ sakyti trumpiau: „nagrinėsime seką $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$, $n\in N$“ arba dar trumpiau: „sakykime, $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$“.

2 pavyzdys. Sakykime, $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Seka yra:

$$1;\ -\frac{1}{4};\ \frac{1}{9};\ -\frac{1}{16};\ \ldots$$

3 pavyzdys. Sakykime, $a_n=7$, $n\in N$. Seka yra: 7; 7; 7; ..., t.y. visi nariai įgyja tą pačią reikšmę.

Seka, kurios visi nariai įgyja lygias reikšmes, yra vadinama *pastovia seka*.

2. Nurodysime dar vieną sekos reiškimo būdą – *rekurentinį* (*indukcinį*). Tuo būdu išreiškiant seką, reikia nurodyti taisyklę (dažniausiai formulę), pagal kurią bendrasis sekos narys apskaičiuojamas iš ankstesniųjų, ir užrašyti kelis pradinius sekos narius.

Formulė, kurioje bendrasis sekos narys yra išreikštas pirmesniais vadinama *rekurentiniu sąryšiu*. Rekurentinio sąryšio pavyzdys gali būti formulė

$$a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}.$$

Pastebėsime, kad rekurentiniu sąryšiu seka nenusakoma pilnutinai, nes pirmųjų sekos narių pagal jį negalima apskaičiuoti.

Iš tikrųjų,

$$\text{kai } n=1,\ a_1=2a_0-a_{-1},$$

$$\text{kai } n=2,\ a_2=2a_1-a_0,$$

$$\text{kai } n=3,\ a_3=2a_2-a_1.$$

Nariai a_0 ir a_{-1}, kurių numeriai 0 ir -1, neegzistuoja, todėl reikšmes a_1 ir a_2 reikia papildomai nurodyti. Tokios duotosios sekos reikšmės a_1 ir a_2 vadinamos *pradinėmis*. Remiantis rekurentiniu sąryšiu ir pradiniais nariais a_1 ir a_2, galima apskaičiuoti bet kurį nagrinėjamosios sekos narį, pradedant a_3.

Sakykime, pavyzdžiui, $a_1=1$, $a_2=0$. Tada

$$a_3=2a_2-a_1=2\cdot 0-1=-1,$$
$$a_4=2a_3-a_2=2\cdot(-1)-0=-2,$$
$$a_5=2a_4-a_3=2\cdot(-2)-(-1)=-3,$$
$$a_6=2a_5-a_4=2\cdot(-3)-(-2)=-4,$$
$$a_7=2a_6-a_5=2\cdot(-4)-(-3)=-5.$$

Taigi pirmieji septyni sekos nariai yra

$$1;\ 0;\ -1;\ -2;\ -3;\ -4;\ -5.$$

3. Kai kuriais atvejais sekos bendrojo nario formulė ir rekurentinis sąryšis nėra žinomi, o seka nusakoma žodžiais. Išnagrinėsime kelis tokių sekų pavyzdžius.

Pavyzdžiai. a) Sakykime, a_n yra kvadratinės šaknies iš dviejų dešimtainis artinys su pertekliumi 10^{-n} tikslumu. Pirmieji tos sekos nariai:

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ \ldots$$

b) Jeigu a_n yra dešimtainis skaičiaus e artinys su trūkumu n-ojo dešimtainio ženklo tikslumu, tai pirmieji sekos nariai yra

$$2{,}7;\ 2{,}71;\ 2{,}718;\ 2{,}71828;\ \ldots$$

c) Visų pirminių skaičių sekos pirmieji nariai yra

$$2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19;\ 23;\ 29;\ 31;\ \ldots$$

Šiuose pavyzdžiuose sekos yra nusakytos žodžiais, t.y. aprašyti jų nariai.

Pastaba. Seka laikoma išreikšta, jeigu yra žinoma taisyklė (dėsnis), kuria remiantis, galima rasti bet kurį duoto numerio jos narį. Tačiau reikia turėti omenyje, kad, žinant baigtinį sekos narių skaičių, negalima vienareikšmiškai nustatyti bendrojo jos nario pavidalo, t.y. sekos pavidalo.

Pavyzdžiui, yra žinomi penki sekos nariai: $2\cdot 3$; $4\cdot 3^2$; $6\cdot 3^3$; $8\cdot 3^4$; $10\cdot 3^5$. Betarpiškai nesunku įsitikinti, kad sekų, kurių bendrieji nariai yra

$$a_n=2n\cdot 3^n$$

ir

$$b_n=2n\cdot 3^n+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5),$$

pirmieji penki nariai sutampa su duotaisiais penkiais nariais.

Pratimai

1. Išrašykite pirmuosius šešis narius šių sekų:

a) $a_n=\dfrac{n^2}{n+1}$; b) $a_n=\dfrac{3n^2-1}{n^2+1}$; c) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n^3+4}$;

d) $a_n=\dfrac{n}{4^n}$; e) $a_n=3^n+\dfrac{1}{2^n}$; f) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$.

2. Ar yra sekos $a_n=n^2+2n+1$ narys skaičius:

a) 289; b) 361; c) 1000; d) 223?

3. Ar yra sekos $a_n=n^2-17n$ narys skaičius:

a) -30; b) -72; c) -100?

Jeigu taip, tai koks to nario numeris?

4. Raskite pirmuosius penkis sekos (a_n) narius, jeigu

a) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+1$; b) $a_1=7,\ a_{n+1}=a_n-3$;

c) $a_1=-5,\ a_{n+1}=2a_n$; d) $a_1=\frac{1}{6},\ a_{n+1}=\frac{1}{a_n}$;

e) $a_1=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$; f) $a_1=a_2=1,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$.

5. Duoti racionalieji skaičiai:

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{7}$.

Išrašykite pirmuosius keturis narius sekų, kurias sudaro tų skaičių dešimtainiai artiniai su trūkumu ir pertekliumi.

6. Parašykite sekos bendrojo nario formulę, jeigu pirmieji penki jos nariai yra:

a) $3\cdot 2;\ 5\cdot 2^2;\ 7\cdot 2^3;\ 9\cdot 2^4;\ 11\cdot 2^5$;

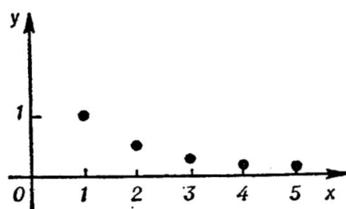
b) $\frac{1}{2};\ \frac{2}{2^2};\ \frac{3}{2^3};\ \frac{4}{2^4};\ \frac{5}{2^5}$;

c) $\frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{2\cdot 3};\ \frac{1}{3\cdot 4};\ \frac{1}{4\cdot 5};\ \frac{1}{5\cdot 6}$;

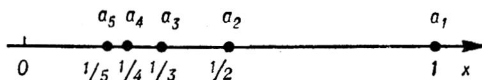
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2;\ \left(\frac{2}{5}\right)^2;\ \left(\frac{3}{7}\right)^2;\ \left(\frac{4}{9}\right)^2;\ \left(\frac{5}{11}\right)^2$;

e) $1;\ \frac{1}{2\sqrt{2}};\ \frac{1}{3\sqrt{3}};\ \frac{1}{4\sqrt{4}};\ \frac{1}{5\sqrt{5}}$.

2. Geometrinis sekos vaizdavimas. Nagrinėjant sekos savybes, patogu remtis geometriniu jos vaizdu. Geometriškai seka vaizduojama dvejopai.



38 pav.

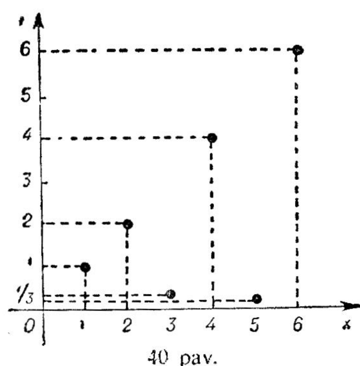


39 pav.

Pirmasis būdas. Kadangi seka (a_n) yra funkcija $f(n),\ n\in N$, tai galima nubrėžti tos funkcijos grafiką, t.y. plokštumoje išnagrinėti aibę taškų $M_n(n;\ f(n)),\ n\in N$ (žr. 38 pav.).

Antrasis būdas. Sekos (a_n) narius galima vaizduoti kaip skaičių ašies taškus (žr. 39 pav.).

Tuos būdus pailiustruosime pavyzdžiais.

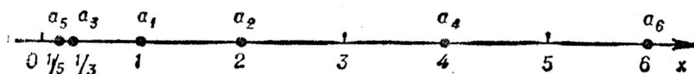


40 pav.

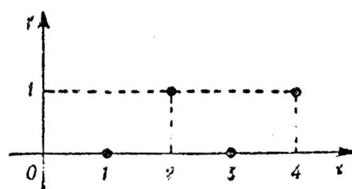
Sakykime,

$$1)\ a_n = \frac{1}{n};\quad 2)\ a_n = n^{(-1)^n};\quad 3)\ a_n = \frac{1+(-1)^n}{2};\quad 4)\ a_n = \frac{3n-1}{n}.$$

Paveiksluose pateikti tų sekų vaizdai: 38, 40, 42, 44 pav. yra jų grafikai (1-asis būdas), o 39, 41, 43, 45 pav. — jų vaizdai skaičių ašyje (2-asis būdas).



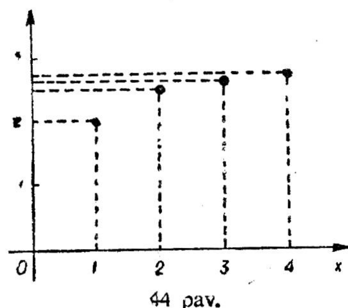
41 pav.



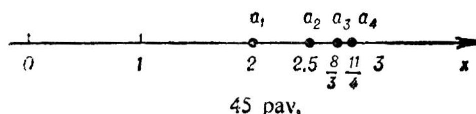
42 pav.



43 pav.



44 pav.



45 pav.

7. Pavaizduokite geometriškai (abiem būdais) sekas, kurių bendrieji nariai yra:

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$; b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$; c) $a_n = \frac{n+1}{2n}$;

d) $a_n = \frac{1}{n^2}$; e) $a_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$; f) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$;

g) $a_n = \frac{3n+1}{n}$; h) $a_n = \frac{1-2n}{n}$.

3. Monotoninės sekos. Monotoninės sekos gali būti mažėjančios, nedidėjančios, didėjančios ir nemažėjančios.

Seka (a_n) yra vadinama *mažėjančia*, jeigu kiekvienas pirmesnysis narys yra didesnis už paskesnįjį, t.y.

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$$

Trumpiau, seka (a_n) yra vadinama mažėjančia, jeigu

$$a_{n+1} < a_n \text{ visiems } n.$$

Seka (a_n) yra vadinama *nedidėjančia*, jeigu

$$a_{n+1} \leqslant a_n \text{ visiems } n,$$

arba, kitaip tariant, kiekvienas pirmesnysis narys yra ne mažesnis už paskesnįjį.

Seka (a_n) yra vadinama *didėjančia*, jeigu kiekvienas paskesnysis narys yra didesnis už pirmesnįjį, t.y.

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

Trumpiau sakant, seka (a_n) yra vadinama didėjančia, jeigu

$$a_n < a_{n+1} \text{ visiems } n.$$

Seka (a_n) yra vadinama *nemažėjančia*, jeigu

$$a_n \leqslant a_{n+1} \text{ visiems } n,$$

arba, kitaip tariant, jeigu kiekvienas paskesnysis narys ne mažesnis už pirmesnįjį.

Sekų monotoniškumo savybę iliustruosime pavyzdžiais, naudodamiesi geometriniu vaizdu.

Pavyzdžiui, seka $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ yra mažėjanti, nes $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ visiems n.



46 pav.

46 paveiksle sekos narių vaizdai yra skaičių ašies taškai ir kiekvienas taškas, atitinkantis paskesnįjį narį a_{n+1}, yra į kairę nuo taško, atitinkančio pirmesnįjį narį a_n.

Seka $\left(\frac{3n-1}{n}\right)$ yra didėjanti, nes $a_n=\frac{3n-1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{3n+2}{n+1}$, todėl

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}>0,$$

t.y. $a_{n+1}>a_n$ visiems n.

45 paveiksle sekos narių vaizdai yra skaičių ašies taškai ir kiekvienas taškas, atitinkantis paskesnįjį narį a_{n+1}, yra į kairę nuo taško, atitinkančio pirmesnįjį narį a_n.

Pabrėšime, kad monotonines sekas galima vaizduoti ir pirmuoju būdu. Imant bet kurį n, didėjančios (nemažėjančios) sekos grafiko taškas, vaizduojantis paskesnįjį narį a_{n+1}, bus aukščiau (ne žemiau) už tašką, vaizduojantį pirmesnįjį narį a_n (žr. 44 pav.); atitinkamai mažėjančios (nedidėjančios) sekos grafiko taškas, vaizduojantis paskesnįjį narį a_{n+1}, bus žemiau (ne aukščiau) už tašką, vaizduojantį pirmesnįjį narį a_n (žr. 38 pav.).

Pastaba. Šiuo atveju laikome, kad taškas M_1 yra aukščiau, negu taškas M_2, jeigu M_1 ordinatė yra didesnė už M_2 ordinatę, ir taškas M_3 yra žemiau, negu taškas M_4, jeigu M_3 ordinatė yra mažesnė už M_4 ordinatę.

Pavyzdžiais įrodysime, kad ne kiekviena seka yra monotoninė. Nemonotoninių sekų pavyzdžiai gali būti

$$1;\ 2;\ \frac{1}{3};\ 4;\ \frac{1}{5};\ 6;\ \ldots \text{ ir } 0;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1;\ \ldots$$

žr. geometrinius tų sekų vaizdus 40, 41, 42, 43 pav.).

Pratimas

8. Nustatykite, kurios sekos yra monotoninės, o kurios — nemonotoninės:

a) $a_n=\frac{2n-3}{n}$; b) $a_n=\frac{n+4}{n}$; c) $a_n=(-1)^n n-6$;

d) $a_n=n^2-7n+6$; e) $a_n=3n^2+5n+6$; f) $a_n=\frac{4-n^2}{n^2}$;

g) $a_n=\frac{3n^2+2}{n^2}$; h) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$; i) $a_n=\frac{n^2+(-1)^n n}{n^2+1}$.

4. Aprėžtos ir neaprėžtos sekos. Nagrinėsime sekas

$$a_n=\frac{1}{n^2},\quad n\in N,\ \text{t.y. } 1;\ \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{3^2};\ \ldots;\ \frac{1}{n^2};\ \ldots, \tag{1}$$

$$a_n=n^{(-1)^n},\quad n\in N,\ \text{t.y. } 1;\ 2;\ \frac{1}{3};\ 4;\ \frac{1}{5};\ 6;\ \frac{1}{7};\ \ldots, \tag{2}$$

$$a_n=-n^2,\quad n\in N,\ \text{t.y. } -1;\ -4;\ -9;\ -16;\ \ldots, \tag{3}$$

$$a_n=(-1)^{n+1}n^3,\quad n\in N,\ \text{t.y. } 1;\ -8;\ 27;\ -64;\ \ldots \tag{4}$$

Visi (1) sekos nariai tenkina nelygybę $0<a_n\leqslant 1$, todėl sakoma, kad ta seka yra *aprėžta iš viršaus ir iš apačios.*

Visi (2) sekos nariai tenkina nelygybę $0<a_n$, todėl sakoma, kad ta seka *aprėžta iš apačios.* Tačiau tai sekai negalima rasti tokio skaičiaus $M>0$, kad, imant bet kurį n, jos nariai nebūtų didesni už tą skaičių M. (Tarp neigiamų skaičių M ieškoti nėra prasmės, nes antrosios sekos nariai yra teigiami.)

Iš tikrųjų, kad ir kokį imtume skaičių M, visada galime rasti lyginio numerio sekos narį a_{2k}, didesnį už tą skaičių.

Tikrai iš nelygybės $a_{2k}>M$, t.y. $2k>M$, išplaukia, kad $k>\frac{M}{2}$, todėl $a_{2k}>M$ visiems $k>\frac{M}{2}$. Pavyzdžiui, sakykime, $M=11$; tada $k>5{,}5$, t.y. $k>5$. Vadinasi, $a_{2k}>11$ visiems $k=6, 7 \ldots$, t.y. $a_n>11$ visiems $n=12$, 14, 16, ... Todėl sakoma, kad (2) seka *neaprėžta iš viršaus.*

Visi (3) sekos nariai tenkina nelygybę $a_n\leqslant -1$, todėl sakoma, kad ta seka *aprėžta iš viršaus.* Tačiau pabrėšime, kad tai sekai neegzistuoja toks skaičius $m<0$, kad, imant bet kokį n, sekos nariai būtų ne mažesni už skaičių m. Tikrai, kad ir koks būtų skaičius $m<0$, visada galima rasti sekos elementą, mažesnį už m. (Tarp teigiamų skaičių m ieškoti nėra prasmės, nes $a_n\leqslant -1$ kiekvienam n.) Iš tikrųjų užtenka išspręsti nelygybę $a_n<m$, t.y. $-n^2<m$ arba $n>\sqrt{-m}$ ($-m>0$, nes $m<0$). Vadinasi, $a_n<m$ kiekvienam $n>\sqrt{-m}$. Sakysime, pavyzdžiui, $m=-9{,}61$, tada

$$n>\sqrt{-(-9{,}61)}=\sqrt{9{,}61}=3{,}1.$$

Taigi $a_n<-9{,}61$ kiekvienam $n>3$, t.y. kai $n=4, 5, \ldots$ Todėl sakoma, kad (3) seka *neaprėžta iš apačios.*

(4) sekai neegzistuoja toks skaičius M, už kurį jos nariai nebūtų didesni, imant bet kokį n, ir neegzistuoja toks skaičius m, už kurį sekos nariai nebūtų mažesni, imant bet kokį n. Tuo galima įsitikinti samprotaujant taip pat, kaip ir apie (2) bei (3) sekas.

Taigi (4) seka neaprėžta nei iš viršaus, nei iš apačios.

Dabar suformuluosime apibrėžimus.

1 apibrėžimas. Seka (a_n) vadinama *aprėžta iš viršaus*, jeigu egzistuoja toks skaičius M, kad kiekvienam n yra teisinga nelygybė $a_n\leqslant M$.

Seka (a_n) vadinama *aprėžta iš apačios*, jeigu egzistuoja toks skaičius m, kad kiekvienam n yra teisinga nelygybė $m\leqslant a_n$.

2 apibrėžimas. Seka (a_n) vadinama *aprėžta*, jeigu ji yra aprėžta ir iš viršaus, ir iš apačios.

Priešingu atveju ji yra vadinama *neaprėžta.*

Paskutinį apibrėžimą galima ir šitaip suformuluoti.

Seka (a_n) yra vadinama *aprėžta*, jeigu egzistuoja tokie skaičiai M ir m, kad kiekvienam n yra teisingos nelygybės $m\leqslant a_n\leqslant M$. Kitaip sakant, seka (a_n) yra vadinama aprėžta, jeigu išpildoma sąlyga

$$(\exists m)(\exists M) \quad m\leqslant a_n\leqslant M \text{ visiems } n.$$

Pažymėjus $B=\max\{|m|, |M|\}$[1], tą apibrėžimą galima suformuluoti šitaip.

Seka (a_n) yra vadinama *aprėžta*, jeigu egzistuoja toks skaičius $B>0$, kad kiekvienam n yra teisinga nelygybė $|a_n|\leqslant B$.

Seka (a_n) yra vadinama *neaprėžta*, jeigu kiekvienam skaičiui $B>0$ egzistuoja toks numeris n, kad $|a_n|>B$.

Išnagrinėsime, ką reiškia geometriškai, kad seka aprėžta. Jeigu (a_n) yra aprėžta, tai egzistuoja atkarpa $[m; M]$, kuriai priklauso visi tos sekos nariai. Kadangi visi aprėžtos sekos nariai tenkina nelygybę $m\leqslant a_n\leqslant M$, tai tas tvirtinimas yra teisingas. Jeigu seka (a_n) yra aprėžta iš apačios, tai kairėje taško m pusėje nėra nė vieno taško a_n, nes nelygybė $m\leqslant a_n$ yra teisinga su visais n.

Jeigu seka (a_n) yra aprėžta iš viršaus, tai dešinėje taško M pusėje nėra nė vieno taško a_n, nes nelygybė $a_n\leqslant M$, yra teisinga su visais n.

Pratimai

9. Kurios iš duotųjų sekų yra aprėžtos, o kurios — ne:

a) $a_n=\frac{1}{n}$; b) $a_n=\frac{n}{n-1}$; c) $a_n=(-1)^n n$;

d) $a_n=(-1)^n n^2$; e) $a=\frac{(-1)^n}{n}$; f) $a_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$;

g) $a_n=\frac{2n}{3n+3}$; h) $a_n=\frac{n-5}{n^2}$; i) $a_n=2^n$;

j) $a_n=3^{-n}$; k) $a_n=n!$?

10. Seka (a_n) nusakyta rekurentiniu būdu:

$$a_1=0 \text{ ir } a_{n+1}=\frac{a_n+3}{4}.$$

Įrodykite, kad ji yra aprėžta.

11. Seka (a_n) nusakyta rekurentiniu būdu:

$$a_1=0,\ a_2=1 \text{ ir } a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n-1}}{2}.$$

Įrodykite, kad ji yra aprėžta.

§ 11. SEKOS RIBA

1. Skaičių sekos riba. Konverguojančios ir diverguojančios skaičių sekos. Smulkiai išnagrinėsime seką

$$a_n=\frac{3n-1}{n},\quad n\in N.$$

Žiūrėdami į tos sekos vaizdą (žr. 45 pav.), pastebėjome, kad jos nariai, didėjant numeriams n, išsidėsto kiek norima arti 3. Iškelsime sau uždavinį —

[1] Čia ir toliau simboliu $\max\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ žymėsime didžiausią iš skaičių $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

tą tvirtinimą suformuluoti matematiškai tiksliai. Tam tikslui iš pradžių atsakysime į šitokį klausimą: koks turi būti n, kad skirtumo a_n-3 modulis būtų mažesnis kaip 0,001?

Spręsime nelygybę $|a_n-3|<0{,}001$.

Kadangi

$$|a_n-3|=\left|\frac{3n-1}{n}-3\right|=\left|-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n},$$

tai, išsprendę nelygybę $\frac{1}{n}<0{,}001$, matysime, kad nelygybė $|a_n-3|<$ $<0{,}001$ yra teisinga kiekvienam $n>N_0=1000$.

Kiekvienam teigiamam ε nelygybė

$$|a_n-3|<\varepsilon \tag{1}$$

yra ekvivalenti nelygybei $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Kadangi mus domina natūrinės reikšmės n, tai (1) nelygybė yra teisinga kiekvienam $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$; čia $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – sveikoji skaičiaus $\frac{1}{\varepsilon}$ dalis. Tuo atveju sakoma, kad sekos $\left(\frac{3n-1}{n}\right)$ riba lygi 3, ir rašoma

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=3.$$

Šis pavyzdys rodo, kad skaičiaus N parinkimas priklauso nuo skaičiaus ε.

Dabar suformuluosime sekos ribos apibrėžimą.

1 apibrėžimas. Skaičius a yra vadinamas *sekos* (a_n) *riba*, jeigu kiekvienam teigiamam skaičiui ε egzistuoja toks sveikasis neneigiamas skaičius N, kad kiekvienam $n>N$ yra teisinga nelygybė

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

Tuo atveju rašoma

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,$$

arba

$$a_n\to a, \text{ kai } n\to\infty,$$

ir sakoma: „Sekos (a_n) riba yra skaičius a“, arba „Seka (a_n) konverguoja prie skaičiaus a“.

Kitaip tariant, skaičius a vadinamas sekos (a_n) riba, jeigu yra išpildoma sąlyga

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N=N(\varepsilon))\ (\forall n>N)\ |a_n-a|<\varepsilon.$$

2 apibrėžimas. Turinti ribą seka yra vadinama *konverguojančia*, o neturinti ribos – *diverguojančia*.

Apskaičiuosime kelių sekų ribas, remdamiesi ribos apibrėžimu.

1 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}.$$

Kai $\varepsilon=0,1$; $0,01$; $0,001$, raskite tokius numerius $N(\varepsilon)$, kad būtų

$$\left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon,$$

kai $n>N$. Gautuosius rezultatus surašykime į lentelę.

Sprendimas. Remiantis ribos apibrėžimu, skaičius $\frac{3}{2}$ bus sekos su bendruoju nariu $a_n = \frac{3n+1}{2n-1}$ riba, jeigu kiekvienam $\varepsilon>0$ egzistuos toks numeris $N=N(\varepsilon)$, kad, kai $n>N$, būtų teisinga nelygybė

$$\left| a_n - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Kadangi

$$\left| \frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{2(2n-1)},$$

tai (2) nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$\frac{2,5}{2n-1} < \varepsilon,$$

kuri yra teisinga kiekvienam $n > \frac{2,5+\varepsilon}{2\varepsilon}$.

Taigi $\left| a_n - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$, kai $n > \frac{2,5+\varepsilon}{2\varepsilon}$.

Iš paskutiniųjų sąryšių išplaukia, kad numeriu $N(\varepsilon)$ galima imti sveikąją skaičiaus $\frac{2,5+\varepsilon}{2\varepsilon}$ dalį, t.y. $N = \left[\frac{2,5+\varepsilon}{2\varepsilon} \right]$.

Taigi įrodėme, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}.$$

Dabar konkrečiam ε rasime $N(\varepsilon)$. Sakykime, pavyzdžiui, $\varepsilon=0,1$; tada

$$N = \left[\frac{2,5+0,1}{2\cdot 0,1} \right] = \left[\frac{2,6}{0,2} \right] = 13.$$

Vadinasi, nelygybė

$$\left| a_n - \frac{3}{2} \right| < 0,1$$

yra teisinga visiems $n>13$.

Remdamiesi formule $N = \left[\frac{2,5+\varepsilon}{2\varepsilon} \right]$, lengvai rasime N reikšmes, kai $\varepsilon=0,01$; $0,001$.

Taigi $N(\varepsilon)$ priklausomybės nuo ε lentelė yra šitokia:

ε	0,1	0,01	0,001
N	13	125	1250

Baigdami pabrėšime, kad ta seka yra konverguojanti, nes ji turi ribą $\frac{3}{2}$.

2 pavyzdys. Įrodykime, kad $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n}=0$.

Sprendimas. Nagrinėsime nelygybę $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$. Kadangi $10^n \geqslant 1+9n$, tai $\frac{1}{10^n} \leqslant \frac{1}{1+9n}$, vadinasi, $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$, kai $\frac{1}{9n}<\varepsilon$. Apibrėžę $N=\left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]$, gausime

$$\left|\frac{1}{10^n}-0\right|<\varepsilon$$

kiekvienam $n>N=\left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]$.

Taigi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n}=0$.

3 pavyzdys. Įrodykime, kad dešimtainių skaičiaus α artinių sekos (α_n) ir (α'_n) konverguoja prie to skaičiaus:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n=\lim_{n\to\infty} \alpha'_n=\alpha.$$

Įrodymas. Akivaizdu, kad dešimtainiams realiojo skaičiaus artiniams yra teisingos nelygybės

$$|\alpha_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{10^n} \text{ ir } |\alpha'_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{10^n}. \tag{3}$$

2 pavyzdyje buvo nustatyta, kad

$$(\forall \varepsilon>0)\left(\exists N=\left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]\right)(\forall n>N)\ \frac{1}{10^n}<\varepsilon. \tag{4}$$

Taigi iš (3) ir (4) išplaukia, kad

$$(\forall \varepsilon>0)\left(\exists N=\left[\frac{1}{9\varepsilon}\right]\right)(\forall n>N)\,|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon \text{ ir } |\alpha'_n-\alpha|<\varepsilon.$$

Vadinasi, remiantis ribos apibrėžimu,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n=\alpha \text{ ir } \lim_{n\to\infty} \alpha'_n=\alpha.$$

1. Įrodykite, kad

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-5}{n}=2$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}=0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{4n+5}=\frac{1}{2}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}=0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+6}{n+1}=5$. Koks turi būti n, kad skaičius $\left|\frac{5n+6}{n+1}-5\right|$ būtu mažesnis kaip 0,1 ir 0,01?

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{2+n}=-1$. Koks turi būti n, kad skaičius $\left|\frac{1-n}{2+n}+1\right|$ būtų mažesnis kaip 0,1 ir 0,001?

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+n}=\frac{1}{2}$. Koks turi būti n, kad skaičius $\left|\frac{n^2-1}{2n^2+n}-\frac{1}{2}\right|$ būtų mažesnis kaip 0,1 ir 0,001?

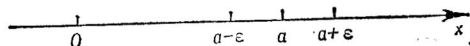
2. Geometrinė sekos konvergavimo prasmė. Sakykime, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Tada, remiantis ribos apibrėžimu,

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N)\ |a_n-a|<\varepsilon \text{ visiems } n>N.$$

Kadangi

$$(|a_n-a|<\varepsilon)\Leftrightarrow(-\varepsilon<a_n-a<\varepsilon)\Leftrightarrow(a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon),$$

tai visi sekos (a_n), konverguojančios prie skaičiaus a, nariai, kurių numeriai $n>N$, t.y. nariai a_{N+1}, a_{N+2} ir t.t., priklauso (žr. 47 pav.) intervalui $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$. Priminsime, kad intervalas $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$, kur $\varepsilon>0$, yra vadinamas *taško a ε-aplinka.*



47 pav.

Vadinasi, sekos (a_n) konvergavimas prie skaičiaus a geometriškai reiškia, kad kiekvienai taško ε-aplinkai priklauso visi duotosios sekos nariai, pradedant tam tikru numeriu, ir tai aplinkai gali nepriklausyti tik baigtinis narių skaičius.

Pavyzdžiui, sekos $\left(\frac{1}{n}\right)$ riba yra nulis. Todėl, kad ir koks būtų skaičius $\varepsilon>0$, intervalui $]-\varepsilon;\ +\varepsilon[$ (taško nulis aplinkai) priklausys beveik visi sekos nariai, t.y. visi nariai, išskyrus baigtinį jų skaičių. Iš tikrųjų, spręsdami nelygybę $\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$, gausime $0<\frac{1}{n}<\varepsilon$, kai $n>\frac{1}{\varepsilon}$, t.y. visi duotosios sekos nariai, kurių numeriai n didesni už skaičių $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, priklausys nulio ε-aplinkai, jai nepriklausys tik baigtinis skaičius sekos narių, kurių numeriai ne didesni kaip N.

Išnagrinėsime dar vieną pavyzdį. Sakykime, duota seka

$$0;\ 1;\ 0;\ 1;\ \ldots;\ \frac{1+(-1)^n}{2};\ \ldots$$

Ta seka ribos neturi. Iš tikrųjų kiekvienam skaičiui a galima nurodyti tokią jo ε-aplinką, pavyzdžiui, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, kad tai aplinkai nepriklausytų begalinis duotosios sekos narių skaičius. Kadangi atstumas tarp taškų 0 ir 1 yra lygus 1, tai intervalui $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$, kai $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, nepriklausys arba 0, arba 1, t.y. kiekvienu atveju nurodytajai taško ε-aplinkai nepriklausys begalinis duotosios sekos narių skaičius. Taigi kiekvienas skaičius a turi ε-aplinką, kuriai nepriklauso begalinis duotosios sekos narių skaičius, o tai reiškia, kad ta seka ribos neturi, t.y. ji diverguoja.

3. Būtina sekos konvergavimo sąlyga. Iš ribos apibrėžimo išplaukia: jeigu sekos (a_n) riba yra skaičius a, tai, pavyzdžiui, kai $\varepsilon=1$, egzistuoja toks numeris N, kad intervalui $]a-1;\ a+1[$ gali nepriklausyti tik nariai a_1, a_2, ..., a_N. Tarp skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_N$, $a-1$, $a+1$ rasime mažiausią ir didžiausią ir pažymėsime juos atitinkamai m ir M. Akivaizdu, kad

$$m\leqslant a_n\leqslant M \quad \text{visiems } n,$$

t.y. seka (a_n) aprėžta (žr. § 10, 4 skirsnį).

Taigi yra įrodytas šitoks tvirtinimas.

Teorema. *Jeigu seka konverguoja, tai ji yra aprėžta.*

Kitaip sakant, būtina sekos konvergavimo sąlyga – ji turi būti aprėžta. Tuo remiantis, nustatoma, kada seka ribos neturi. Pavyzdžiui, seka

$$1;\ 2;\ \frac{1}{3};\ 4;\ \frac{1}{5};\ \ldots;\ n^{(-1)^n};\ \ldots$$

yra neaprėžta, nes ji neaprėžta iš viršaus (žr. § 10, 4 skirsnį), todėl ribos neturi.

4. Sekos ribos vienatis.

Teorema. *Kiekviena seka turi ne daugiau kaip vieną ribą.*

Įrodymas. Įrodinėsime prieštaravimo būdu. Sakykime, egzistuoja seka (a_n), turinti dvi skirtingas ribas a ir b, be to, $a<b$. Imdami $\varepsilon=\frac{b-a}{3}>0$, gausime

$$a+\varepsilon<b-\varepsilon. \tag{1}$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, tai, remiantis apibrėžimu, skaičiui $\varepsilon=\frac{b-a}{3}>0$ egzistuoja toks N_1, kad $(\forall n>N_1)\ |a_n-a|<\varepsilon$ ir atskiru atveju

$$(\forall n>N_1)\qquad a_n<a+\varepsilon. \tag{2}$$

Kita vertus, $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, todėl egzistuoja toks N_2, kad $(\forall n > N_2)$ $|a_n - b| < \varepsilon$ ir atskiru atveju

$$(\forall n > N_2) \qquad b - \varepsilon < a_n. \qquad (3)$$

Pažymėję $N = \max\{N_1, N_2\}$, gausime: kiekvienam $n > N$ yra teisingos (2) ir (3) nelygybės. Tačiau, remiantis (1) sąryšiu, to negali būti. Vadinasi, gavome prieštaravimą. Taigi seka negali turėti dviejų skirtingų ribų.

Galimi du atvejai:

a) Seka turi ribą; tada, remiantis ką tik įrodyta teorema, ta riba yra vienintelė. Tokios sekos vadinamos *konverguojančiomis*.

b) Seka ribos neturi. Tokios sekos vadinamos *diverguojančiomis*.

Pavyzdžiui, anksčiau nagrinėtos sekos

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots \text{ ir } \frac{1}{10};\ \frac{1}{10^2};\ \ldots;\ \frac{1}{10^n};\ \ldots$$

konverguoja, o sekos

$$0;\ 1;\ 0;\ 1;\ \ldots \text{ ir } 1;\ 2;\ \frac{1}{3};\ 4;\ \ldots;\ n^{(-1)^n};\ \ldots$$

diverguoja.

Pratimas

5. Nustatykite, kurios sekos (a_n) konverguoja, o kurios — diverguoja:

a) $a_n = \frac{4n+2}{2n}$; b) $a_n = \frac{(-3)^n+3}{2}$; c) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$;

d) $a_n = 2^n - 1$; e) $a_n = n^2 - 1$; f) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^5}$.

5. Nykstančios sekos. Pagrindinės nykstančių sekų teoremos. Ribų teoremų įrodymai labai palengvėja, įvedus nykstančios sekos sąvoką.

Apibrėžimas. Seka yra vadinama *nykstančia*, jeigu jos riba lygi nuliui.

Pavyzdžiui, seka $\left(\frac{1}{n}\right)$ yra nykstanti, nes jos riba lygi nuliui (žr. 7 skirsnį). Seka $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ taip pat yra nykstanti, nes $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ (žr. 1 skirsnio 2 pavyzdį).

1 teorema. *Dviejų nykstančių sekų suma yra nykstanti seka.*

Įrodymas. Sakykime, (a_n) ir (b_n) yra dvi nykstančios sekos. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ yra teisingi šie sąryšiai:

$$\exists N_1 (\forall n > N_1) \qquad |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (1)$$

$$\exists N_2 (\forall n > N_2) \qquad |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Pažymėję $N = \max\{N_1, N_2\}$, matome, kad kiekvienam $n > N$ (1) ir (2) nelygybės yra teisingos. Todėl kiekvienam $n > N$

$$|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Kadangi $\varepsilon > 0$ yra bet koks skaičius, tai įrodėme, kad

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0,$$

t.y. seka $(a_n + b_n)$ yra nykstanti.

1 teorema įrodyta.

Analogiškai galima įrodyti, kad bet kokio baigtinio skaičiaus nykstančių sekų suma yra nykstanti seka.

2 teorema. *Nykstančios sekos ir aprėžtos sekos sandauga yra nykstanti seka.*

Įrodymas. Sakykime, (b_n) yra aprėžta seka ir

$$|b_n| \leqslant M \quad \text{visiems } n, \tag{3}$$

o (a_n) yra nykstanti seka. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N = N(\varepsilon)$, kad

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M+1} \quad \text{visiems } n > N. \tag{4}$$

Iš (3) ir (4) nelygybių išplaukia:

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M+1} \cdot M < \varepsilon,$$

kiekvienam $n > N$, o tai ir reiškia, kad

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0,$$

t.y. seka $(a_n b_n)$ yra nykstanti. 2 teorema įrodyta.

Kadangi nykstanti seka yra aprėžta, tai iš 2 teoremos išplaukia, kad dviejų nykstančių sekų sandauga yra nykstanti seka.

3 teorema. *Sakykime, duota seka* (a_n). *Jeigu* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *tai* $a_n = a + \alpha_n$; *čia* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. *Atvirkščiai, jeigu* $a_n = a + \alpha_n$ *ir* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, *tai* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Įrodymas. Jeigu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N = N(\varepsilon)$, kad

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{visiems } n > N. \tag{5}$$

Kadangi $\alpha_n = a_n - a$, tai

$$|\alpha_n| < \varepsilon \quad \text{visiems } n > N. \tag{6}$$

Iš (6) išplaukia, kad $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Kadangi iš (6) išplaukia (5), tai analogiškai galima įrodyti ir antrąjį teoremos tvirtinimą. 3 teorema yra įrodyta.

6. Sekų ribų teoremos. Ieškant ribų, dažnai reikia remtis sumos, sandaugos, skirtumo ir dalmens ribos teoremomis.

1 teorema (apie sumos ribą). *Jeigu sekos (a_n) ir (b_n) konverguoja, tai seka (a_n+b_n) taip pat konverguoja ir*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Įrodymas. Sakykime,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=b.$$

Tada, remiantis 5 skirsnio 3 teoremos pirmąja dalimi,

$$a_n=a+\alpha_n \qquad ((\alpha_n) \text{ yra nykstanti}),$$

$$b_n=b+\beta_n \qquad ((\beta_n) \text{ yra nykstanti}).$$

Sudėję tas lygybes, gausime

$$a_n+b_n=(a+b)+(\alpha_n+\beta_n).$$

Kadangi, remiantis 5 skirsnio 1 teorema, dviejų nykstančių sekų suma yra nykstanti seka, tai $(\alpha_n+\beta_n)$ yra nykstanti.

Taigi, remiantis 5 skirsnio 3 teoremos antrąja dalimi,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n. \qquad (1)$$

Teorema įrodyta.

Matematinės indukcijos metodu, remiantis (1) formule, galima įrodyti 1 teoremą baigtiniam dėmenų skaičiui: *baigtinio skaičiaus konverguojančių sekų suma konverguoja, o jos riba yra lygi tų sekų ribų sumai, t.y.*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+\ldots+c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n+\ldots+\lim_{n\to\infty}c_n.$$

2 teorema (apie sandaugos ribą). *Jeigu sekos (a_n) ir (b_n) konverguoja, tai seka $(a_n\cdot b_n)$ taip pat konverguoja ir*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=(\lim_{n\to\infty}a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty}b_n).$$

Įrodymas. Remiantis teoremos sąlyga,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a \text{ ir } \lim_{n\to\infty}b_n=b,$$

todėl iš 5 skirsnio 3 teoremos pirmosios dalies išplaukia, kad

$$a_n=a+\alpha_n \text{ ir } b_n=b+\beta_n;$$

čia (α_n) ir (β_n) yra nykstančios sekos. Sudauginę pastarąsias lygybes, gausime

$$a_n\cdot b_n=(a+\alpha_n)\cdot(b+\beta_n)=ab+(b\cdot\alpha_n+a\cdot\beta_n+\alpha_n\cdot\beta_n).$$

Iš 5 skirsnio 1 ir 2 teoremų išplaukia, kad $(b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n)$ yra nykstanti seka. Taigi, remiantis 5 skirsnio 3 teoremos antrąja dalimi,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = ab = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n). \qquad (2)$$

Teorema įrodyta.

Matematinės indukcijos metodu galima įrodyti, kad *baigtinio skaičiaus konverguojančių sekų sandauga konverguoja ir jos riba yra lygi sekų ribų sandaugai.*

Pavyzdžiui, įrodysime tą teiginį, kai yra trys daugikliai. Sakykime,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \text{ir} \quad \lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

Remiantis (2) formule,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = ab.$$

Kadangi teorema įrodyta, kai yra du daugikliai, tai

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n \cdot c_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n) \lim_{n\to\infty} c_n = (ab) \cdot c = abc.$$

1 išvada. *Pastovų daugiklį galima iškelti prieš ribos ženklą:*

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Įrodymas. Remiantis 2 teorema,

$$\lim_{n\to\infty} (ca_n) = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n,$$

nes $\lim_{n\to\infty} c = c$.

2 išvada. *Jeigu sekos (a_n) ir (b_n) konverguoja, tai seka $(a_n - b_n)$ taip pat konverguoja ir*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Įrodymas. Remiantis 1 teorema,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_n + (-1) b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} (-1) b_n.$$

Turėdami omenyje 1 išvadą, gausime

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Pateiksime be įrodymo dalmens ribos teoremą.

3 teorema. *Jeigu sekos (a_n) ir (b_n) konverguoja, $b_n \neq 0$, kai $n = 1, 2, \ldots$, ir $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, tai seka $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ taip pat konverguoja ir*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Įrodinėjant kai kurias teoremas, patogu remtis dar viena teorema, kurią tik suformuluosime, bet neįrodinėsime.

4 teorema. *Jeigu trijų sekų (a_n), (b_n) ir (c_n) nariai tenkina nelygybę $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, sekos (a_n) ir (b_n) konverguoja ir jų ribos sutampa, tai seka (c_n) taip pat konverguoja ir jos riba lygi sekų (a_n) ir (b_n) ribai.*

Remdamiesi ribų teoremomis, apskaičiuosime kelias ribas.

Pavyzdys. Raskime ribą

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-3}{13-7n}.$$

Sprendimas. Skaitiklyje ir vardiklyje yra diverguojančios sekos (nes jos yra neaprėžtos), todėl tiesiogiai remtis dalmens ribos teorema negalima. Šiuo atveju reiškinį reikia pertvarkyti: skaitiklį ir vardiklį padalyti iš n (trupmena dėl to nepasikeis), po to remtis dalmens ir skirtumo ribos teoremomis. Užrašysime nuosekliai ribos skaičiavimo veiksmus:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-3}{13-7n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8-\frac{3}{n}}{\frac{13}{n}-7} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13}{n}-7\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 8 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{13}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 7} = \frac{8-0}{0-7} = -\frac{8}{7}.$$

Analogiškai skaičiuojamos ir šios ribos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8(n^2-3n-4)}{3-n-4n^2} = \lim_{n\to\infty} 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n-4}{3-n-4n^2} =$$

$$= 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}-4} = 8 \cdot \frac{1}{-4} = -2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-3n-1}{4-5n-n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{4}{n^3}-\frac{5}{n^2}-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Pratimas

6. Raskite ribas:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{4n-8}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-n}{2n+1}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{1-4n^2}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n-n^3}{(3n+1)^3}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{2n}{3n+1}\right)$; g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2+n-1}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$; i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

7. Neaprėžtai didėjančios sekos. Nykstančios ir neaprėžtai didėjančios sekų sąryšis.

Apibrėžimas. Seka (a_n) yra vadinama *neaprėžtai didėjančia*, jeigu kiekvienam teigiamam skaičiui A egzistuoja toks sveikasis neneigiamas skaičius N, kad kiekvienam $n>N$ teisinga nelygybė $|a_n|>A$. Tada rašoma

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty.$$

Kitaip sakant, seka (a_n) vadinama neaprėžtai didėjančia, jeigu išpildoma sąlyga

$$(\forall A>0)\,\exists N\,(\forall n>N)\quad |a_n|>A.$$

Pavyzdžiui, $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$, t.y. seka (n) yra neaprėžtai didėjanti.

Teorema. *Jeigu seka (a_n), $a_n\neq 0$, $n=1, 2, \ldots$, yra neaprėžtai didėjanti, tai seka $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ yra nykstanti, ir atvirkščiai.*

Įrodymas. Sakykime, (a_n) yra neaprėžtai didėjanti seka. Tada, remiantis apibrėžimu,

$$(\forall A>0)\,\exists N\,(\forall n>N)\quad |a_n|>A. \tag{1}$$

Paėmę $\varepsilon=\frac{1}{A}$, iš (1) sąryšio gausime:

$$\frac{1}{|a_n|}<\frac{1}{A}=\varepsilon \text{ visiems } n>N.$$

Kadangi ε yra bet koks teigiamas skaičius, tai $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a}=0$, t.y. seka $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ yra nykstanti.

Sakykime, seka (a_n) yra nykstanti. Tada, remiantis apibrėžimu,

$$(\forall \varepsilon>0)\,\exists N\,(\forall n>N)\quad |a_n|<\varepsilon. \tag{2}$$

Paėmę $A=\frac{1}{\varepsilon}>0$, iš (2) sąryšio rasime, kad

$$\frac{1}{|a_n|}>\frac{1}{\varepsilon}=A \text{ visiems } n>N,$$

t.y. seka $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ yra neaprėžtai didėjanti.

Pavyzdžiai. 1) Kadangi seka (n) yra neaprėžtai didėjanti, tai, remiantis teorema, seka $\left(\frac{1}{n}\right)$ yra nykstanti.

2) Kadangi seka (10^{-n}) yra nykstanti, tai, remiantis teorema, seka (10^n) yra neaprėžtai didėjanti.

8. Monotoninės aprėžtos sekos ribos egzistavimas. Norint nustatyti, ar seka konverguoja, dažnai remiamasi pakankamu ribos egzistavimo požymiu.

Vejerštraso teorema. *Kiekviena monotoninė aprėžta seka turi ribą.* Dažnai ta teorema formuluojama ir šitaip: *jeigu seka yra nemažėjanti (nedidėjanti) ir aprėžta iš viršaus (iš apačios), tai ji turi ribą.*

Tos teoremos neįrodinėsime. Atkreipsime dėmesį, kad Vejerštraso teoremoje yra suformuluotos pakankamos sekos ribos egzistavimo sąlygos, bet nenurodyta, kaip tą ribą rasti. Išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

1 pavyzdys. Įrodykime, kad $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$, kai $|q|<1$.

Įrodymas. Jeigu $q=0$, tai $q^n=0$, todėl akivaizdu, kad tvirtinimas yra teisingas.

Sakykime, $0<q<1$. Duotoji seka (q^n) yra aprėžta: $0<q^n<1$ visiems n; be to, ji yra mažėjanti, nes $q^{n+1}=q^n\cdot q<q^n$ Vadinasi, seka tenkina abi Vejerštraso teoremos sąlygas, todėl turi ribą, kurią žymėsime a.

Kadangi pastovų daugiklį galima iškelti prieš ribos ženklą (žr. 6 skirsnio 1 išvadą), tai

$$a=\lim_{n\to\infty} q^n=\lim_{n\to\infty} q\cdot q^{n-1}=q\lim_{n\to\infty} q^{n-1}=q\cdot a,$$

t.y. $a=q\cdot a$. Kadangi $1\neq q$, tai $a=0$, todėl

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0.$$

Sakykime, $-1<q<0$; tada

$$q^n=(-1)^n|q|^n$$

ir $0<|q|<1$.

Remiantis ką tik įrodytu faktu, $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$. Šiuo atveju seka (q^n) yra aprėžtos sekos $((-1)^n)$ ir nykstančios sekos $(|q|^n)$ sandauga.

Vadinasi, remiantis 5 skirsnio 2 teorema, seka (q^n), $-1<q<0$, yra taip pat nykstanti, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0, \text{ kai } -1<q<0.$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0,$$

kai $|q|<1$.

2 pavyzdys. Nagrinėsime seką, kurios bendrasis narys yra

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{1}$$

ir, remdamiesi Vejerštraso teorema, įrodysime, kad ji turi ribą.

Sprendimas. Imkime pagalbinę seką, kurios bendrasis narys yra

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ta seka yra aprėžta iš apačios, nes $b_n > 0$. Įrodysime, kad ji mažėja.

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n+1}}{(n+1)^{n+1}(n-1)^n} =$$

$$= \frac{(n^2)^{n+1}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}.$$

Remiantis Bernulio nelygybe (žr. § 7, 3 skirsnį, 2 pavyzdį), kai $n \geqslant 2$,

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n^2-1} = 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1},$$

t.y.

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > \frac{n}{n-1}.$$

Taigi kiekvienam $n \geqslant 2$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} > \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = 1.$$

Iš čia išplaukia, kad seka (b_n) mažėja. Remiantis Vejerštraso teorema, seka (b_n) turi ribą.

Dabar nagrinėkime sekos (a_n) ribą:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Taigi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ egzistuoja. Tą ribą sutarta žymėti raide e, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Skaičiaus e vaidmuo matematikoje, gamtos moksluose ir technikoje yra labai didelis. Tai – iracionalusis skaičius, 10^{-4} tikslumu lygus 2,7183.

7. Kurie teiginiai yra teisingi:
a) jeigu seka yra neaprėžta, tai ji neturi ribos;
b) jeigu seka turi ribą, tai ji yra aprėžta;
c) jeigu seka nėra monotoninė, tai ji neturi ribos;
d) jeigu seka turi ribą, tai ji yra monotoninė?
8. Nustatykite, kurios sekos turi ribą:

a) $a_n = -\frac{1}{2n}$; b) $a_n = \frac{4}{4n-3}$; c) $a_n = \frac{n+1}{n^2+2}$;

d) $a_n = \frac{1}{3^n}$; e) $a_n = \frac{1}{4^n}$; f) $a_n = \frac{1}{n-(-1)^n}$;

g) $a_n = n-(-1)^{n+1}$; h) $a_n = \frac{n!}{\ln n}$;

i) $a_n = \frac{1}{\sqrt{3n-1}}$; j) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

9. Skaičių eilutės sąvoka. Kai duota skaičių seka (a_n), reiškinys

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

yra vadinamas *begalinė skaičių eilute.*

Šiuo atveju a_n yra vadinamas *eilutės n-uoju* (*bendruoju*) *nariu.* Eilutė su bendruoju nariu a_n trumpiau užrašoma šitaip:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Baigtinės sumos

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

yra vadinamos (1) *eilutės dalinėmis sumomis.* Jos sudaro seką

$$S_1;\ S_2;\ S_3;\ \ldots;\ S_n;\ \ldots \tag{2}$$

Apibrėžimas. Jeigu dalinių sumų seka (S_n) turi ribą, tai ta riba yra vadinama (1) *eilutės suma,* o (1) eilutė vadinama *konverguojančia.*

Jeigu seka (S_n) diverguoja, tai (1) eilutė yra vadinama *diverguojančia.*

Pavyzdžiai

1) Sakykime, duota eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots$$

Tos eilutės dalinių sumų seka yra

$$S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ \ldots,\ S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=0,\ \ldots$$

Ta seka ribos neturi, vadinasi, eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ diverguoja.

2) Nagrinėsime eilutę

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Sudarysime tos eilutės dalinių sumų seką:

$$S_1=a_1=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},$$

$$S_2=a_1+a_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Akivaizdu, kad

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Vadinasi, remiantis apibrėžimu, duotoji eilutė konverguoja, o jos suma yra 1, t.y.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

3) Nagrinėsime begalinę dešimtainę trupmeną $a_0, a_1a_2a_3\ldots$, kuri yra realiojo skaičiaus α išraiška. Tą trupmeną galima užrašyti šitaip:

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots, \qquad (3)$$

t.y. kaip tam tikrą laipsninę eilutę. Sudarysime tos eilutės dalines sumas:

$$S_1=a_0,\quad S_2=a_0+\frac{a_1}{10},\ \ldots,$$

$$S_n=a_0+\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}},\ \ldots$$

Akivaizdu, kad (3) eilutės dalinės sumos yra dešimtainiai realiojo skaičiaus α artiniai su trūkumu. Anksčiau (žr. § 11, 1 skirsnį) buvo įrodyta, kad $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Taigi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n-1} = \alpha.$$

Vadinasi, realusis skaičius α yra (3) eilutės suma.

10. Begalinės mažėjančios progresijos suma. Nagrinėsime geometrinę progresiją, t.y. seką, kurios bendrasis narys yra $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Įrodysime, kad iš tos sekos narių sudaryta eilutė

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots \tag{1}$$

konverguoja, kai $|q| < 1$, ir rasime jos sumą.

Kaip žinoma, n pirmųjų tos progresijos narių, t.y. n-oji dalinė (1) eilutės suma, kai $q \neq 1$, yra

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Todėl, kai $|q| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right) = \frac{a_1}{1-q},$$

nes $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Taigi nustatėme, kad (1) eilutė konverguoja, kai $|q| < 1$.

Suma eilutės, sudarytos iš begalinės mažėjančios geometrinės progresijos narių, yra vadinama tos progresijos suma. Taigi begalinės geometrinės progresijos suma apskaičiuojama pagal formulę

$$S = \frac{a_1}{1-q}; \tag{2}$$

čia a_1 yra pirmasis progresijos narys, q ($|q| < 1$) – progresijos vardiklis.

Pavyzdys. Raskime eilutės

$$1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{27}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \ldots$$

sumą.

Sprendimas. Kadangi seka (a_n), kai $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, yra geometrinė progresija, kurios $a_1 = 1$ ir $q = -\frac{1}{3}$ $\left(|q| = \frac{1}{3} < 1\right)$, tai duotoji eilutė konverguoja, o jos suma randama iš (2) formulės:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Nagrinėsime kokią nors begalinę periodinę dešimtainę trupmeną $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_m (b_1 b_2 \dots b_n)$. Įrodysime, kad ta trupmena yra racionalusis skaičius. Remsimės (2) formule:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ \dots \ a_m + \left(\frac{b_1}{10^{m+1}} + \frac{b_2}{10^{m+2}} + \dots + \frac{b_n}{10^{m+n}} \right) +$$

$$+ \left(\frac{b_1}{10^{m+n+1}} + \frac{b_2}{10^{m+n+2}} + \dots + \frac{b_n}{10^{m+2n}} \right) + \dots =$$

$$= a_0, a_1 a_2 \ \dots \ a_m + \left(\frac{b_1}{10^{m+1}} + \frac{b_2}{10^{m+2}} + \dots + \frac{b_n}{10^{m+n}} \right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \dots \right) = a_0, a_1 a_2 \ \dots \ a_m +$$

$$+ \left(\frac{b_1}{10^{m+1}} + \frac{b_2}{10^{m+2}} + \dots + \frac{b_n}{10^{m+n}} \right) \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} =$$

$$= a_0, a_1 a_2 \ \dots \ a_n + \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{10^m (10^n - 1)}.$$

Taigi

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ \dots \ a_m (b_1 b_2 \ \dots \ b_n) =$$

$$= a_0, a_1 a_2 \ \dots \ a_m + \frac{b_1 b_2 \dots b_n}{10^m (10^n - 1)}. \qquad (3)$$

Pavyzdžiai. Remdamiesi (3) formule, begalines dešimtaines periodines trupmenas užrašysime kaip paprastąsias:

$$1)\ 0,(285714) = 0 + \frac{285\,714}{10^6 - 1} = \frac{285\,714}{999\,999} = \frac{2 \cdot 142\,857}{7 \cdot 142\,857} = \frac{2}{7};$$

$$2)\ 43,2\,(63) = 43,2 + \frac{63}{10 \cdot (10^2 - 1)} = 43 + \frac{2}{10} + \frac{63}{10 \cdot 99} =$$

$$= 43 + \frac{2}{10} + \frac{7}{110} = 43\,\frac{29}{110}.$$

Pastaba. (3) formulėje imkime $n = 1$ ir $b_1 = 9$, tada

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ \dots \ a_m + \frac{9}{10^m (10^n - 1)} =$$

$$= a_0, a_1 a_2 \ \dots \ a_m + \frac{9}{10^m \cdot 9} = a_0, a_1 a_2 \ \dots \ a_m + \frac{1}{10^m}.$$

Taigi kiekviena dešimtainė periodinė trupmena su periodu 9 yra lygi dešimtainei periodinei trupmenai su periodu 0, kurioje prieš periodą esančios pozicijos skaitmuo yra vienetu didesnis, negu pradinėje trupmenoje.

4. 1545

9. Raskite sumą begalinės geometrinės progresijos:

a) $2;\ \frac{4}{5};\ \frac{8}{25};\ \frac{16}{125};\ \ldots;$ b) $1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{64};\ \ldots;$

c) $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{6};\ \frac{1}{18};\ -\frac{1}{54};\ \ldots;$ d) $-3;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{12};\ -\frac{1}{72};\ \ldots$

10. Raskite begalinės geometrinės progresijos (a_n) sumą, kai

a) $a_2=\frac{1}{4},\quad q=\frac{3}{5};$ b) $a_3=-1,\quad q=\frac{1}{7};$

c) $a_2=-2,\quad q=-\frac{1}{2};$ d) $a_3=-\frac{1}{2},\quad q=-\frac{1}{3}.$

11. Užrašykite kaip paprastąją trupmeną:

a) 0,82 (63); b) 13,83 (54); c) 8,4 (57);

d) −10,3 (621); e) −32,2 (54); f) 3,09 (04).

§ 12. FUNKCIJOS RIBA

1. Funkcijos ribos taške sąvoka. Išnagrinėsime kelis pavyzdžius.
1 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=x^2$, $x\in]-\infty;+\infty[$. Raskime tos funkcijos f reikšmes, imdami kelis x iš taško $x=3$ δ-aplinkos (t.y. iš intervalo $]3-\delta;\ 3+\delta[$, kai $\delta>0$):

x	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	8,41	8,9401	8,994001	9	9,006001	9,0601	9,61

Peržvelgę lentelę, matome, kad kuo x yra arčiau 3, tuo atitinkama $f(x)$ reikšmė arčiau 9. Įrodysime, kad kiekvienam $\varepsilon>0$ funkcijos $f(x)=x^2$ reikšmės priklauso taško 9 ε-aplinkai, jeigu tik argumento reikšmės yra iš kurios nors taško 3 δ-aplinkos (δ randamas, atsižvelgiant į ε).

Iš tikrųjų, imdami x reikšmes, tenkinančias nelygybę $|x-3|<\delta$ (taip pat nelygybę $|x+3|<\delta+6$), gauname $|x^2-9|=|x-3|\,|x+3|<$ $<\delta(6+\delta)$. Parinkę $\delta>0$ tokį, kad būtų $\delta(\delta+6)<\varepsilon$, pavyzdžiui, $\delta<1$ ir $\delta<\frac{\varepsilon}{7}$, įsitikinsime, kad x reikšmės, tenkinančios sąryšį $|x-3|<\delta$, tenkina ir nelygybę $|x^2-9|<\varepsilon$.

Tuo atveju sakoma, kad funkcijos $f(x)$ riba taške $x=3$ (arba kai $x\to3$) yra lygi 9, ir rašoma $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$.

2 pavyzdys. Nagrinėsime funkciją $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, apibrėžtą visoje skaičių ašyje, išskyrus tašką $x=2$. Ištirsime, kokias reikšmes įgyja ta funkcija, kai argumentas įgyja reikšmes iš kurios nors taško 2 aplinkos, išskyrus patį tašką 2:

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,9	3,99	3,999	Funkcija neegzistuoja	4,001	4,01	4,1

Lentelėje matyti, kad funkcijos $f(x)$ reikšmės mažai skiriasi nuo skaičiaus 4, kai x yra arti taško 2. Įrodysime, kad, parinkus bet kokį $\varepsilon>0$, funkcijos reikšmės priklauso taško 4 ε-aplinkai, jeigu tik x priklauso kuriai nors taško 2 δ-aplinkai ir $x\neq 2$, o δ randamas, atsižvelgiant į ε.

Iš tikrųjų,

$$|f(x)-4|=\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|(x+2)-4|=|x-2|.$$

Paėmę $\delta=\varepsilon$, gausime $|f(x)-4|<\varepsilon$, jeigu tik x reikšmės tenkina nelygybę $0<|x-2|<\delta$.

Tuo atveju sakoma, kad funkcijos $f(x)$ riba taške $x=2$ (arba kai $x\to 2$) yra lygi 4, t.y.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

Dabar suformuluosime funkcijos ribos taške apibrėžimą.

Apibrėžimas. Sakykime, funkcija $f(x)$ yra apibrėžta kurioje nors taško a aplinkoje, galbūt išskyrus patį tašką a. Skaičius B yra vadinamas *funkcijos $f(x)$ riba taške a* (arba, *kai x artėja prie a*), jeigu kiekvienam $\varepsilon>0$ egzistuoja toks skaičius $\delta>0$, kad nelygybė $|f(x)-B|<\varepsilon$ yra teisinga visiems x, tenkinantiems nelygybę $0<|x-a|<\delta$.

Tuo atveju rašoma

$$\lim_{x\to a} f(x)=B \text{ arba } f(x)\to B, \text{ kai } x\to a.$$

1 pastaba. Pabrėšime, kad taškas a, kuriame nagrinėjama funkcijos $f(x)$ riba, gali priklausyti funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sričiai (žr. 1 pavyzdį), bet gali jai ir nepriklausyti (žr. 2 pavyzdį). Ieškant funkcijos ribos taške, funkcijos reikšmė tame taške nenagrinėjama.

2 pastaba. Nagrinėjant funkcijos ribos taške sąvoką, svarbu turėti omenyje, kad δ parinkimas priklauso ir nuo ε, ir nuo taško a, kuriame nagrinėjama riba.

Remdamiesi ribos apibrėžimu, rasime kai kurių funkcijų ribas.

3 pavyzdys. Įrodysime, kad pastovios funkcijos riba yra lygi tos funkcijos reikšmei.

Įrodymas. Sakykime, $f(x)=c$ visiems x iš kokio nors atvirojo intervalo, kuriam priklauso taškas a. Tada kiekvienam $\varepsilon>0$ tame intervale bus

$$|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon.$$

Taigi

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} c=c.$$

4 pavyzdys. Įrodysime, kad

$$\lim_{x\to a} x=a.$$

Įrodymas. Sakykime, $f(x)=x$ ir ε yra koks nors teigiamas skaičius. Parinkę $\delta=\varepsilon>0$, gausime, kad $|f(x)-a|=|x-a|<\varepsilon$, kai tik $|x-a|<\delta$. Taigi, remiantis ribos apibrėžimu,

$$\lim_{x\to a} x=a.$$

Pratimas

1. Remdamiesi funkcijos ribos apibrėžimu, įrodykite, kad yra teisingos šios lygybės:

a) $\lim\limits_{x\to 4} 2x=8$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (3-12x)=-3$; c) $\lim\limits_{x\to 1} (3x^2-2)=1$.

2. Vienpusės ribos. 1 skirsnyje nagrinėjome funkcijos ribą taške, kai argumentas x įgyja visas reikšmes iš taško a δ-aplinkos (išskyrus patį tašką $x=a$) tiek iš kairės to taško pusės, tiek ir iš dešinės.

Jeigu, ieškant ribos, imamos x reikšmės, esančios į kairę nuo a, tai tokia riba yra vadinama *kairiąja* (arba iš kairės) ir žymima

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=f(a-0);$$

jeigu x reikšmės yra imamos tik iš dešinės taško a pusės, tai tokia riba yra vadinama *dešiniąja* (arba iš dešinės) ir žymima

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a+0).$$

Kairioji ir dešinioji ribos yra vadinamos *vienpusėmis ribomis*, o pati riba taške kartais vadinama *dvipuse*.

Kai nagrinėjamos vienpusės ribos taške $x=0$ (t.y. kai $x\to 0$), užrašas supaprastinamas ir rašoma $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=f(-0)$, jeigu riba yra kairioji, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=f(+0)$, jeigu riba – dešinioji.

Dabar suformuluosime tikslius vienpusių ribų apibrėžimus.

Apibrėžimas. Sakykime, funkcija $f(x)$ yra apibrėžta intervale $]a;\ b[$. Skaičius B yra vadinamas *dešiniąja* (iš dešinės) *funkcijos* $f(x)$ *riba*

taške a, jeigu kiekvienam $\varepsilon>0$ egzistuoja toks $\delta>0$, kad nelygybė $|f(x)-B|<\varepsilon$ yra teisinga visiems x, tenkinantiems sąlygą $a<x<a+\delta$.

Analogiškai skaičius C yra vadinamas *kairiąja* (iš kairės) *funkcijos* $f(x)$ *riba taške a*, jeigu kiekvienam $\varepsilon>0$ egzistuoja toks $\delta>0$, kad nelygybė $|f(x)-C|<\varepsilon$ yra teisinga visiems x, tenkinantiems sąlygą $b-\delta<x<b$.

Nustatysime sąryšį tarp funkcijos f ribos ir vienpusių ribų kokiame nors taške x_0.

Sakykime, funkcija $f(x)$ yra apibrėžta kokioje nors taško x_0 aplinkoje, galbūt išskyrus tašką x_0, t.y. apibrėžta kokiuose nors intervaluose $]a; x_0[$ ir $]x_0; b[$.

Jeigu $f(x)$ turi ribą taške x_0 ir

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \tag{1}$$

tai, remiantis ribų apibrėžimais, turi taip pat vienpuses ribas

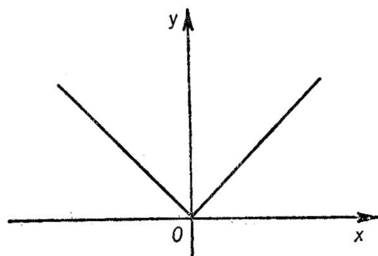
$$f(x_0+0),\ f(x_0-0) \text{ ir } f(x_0+0)=f(x_0-0)=A. \tag{2}$$

Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: jeigu yra teisingas (2) sąryšis, tai teisingas ir (1).

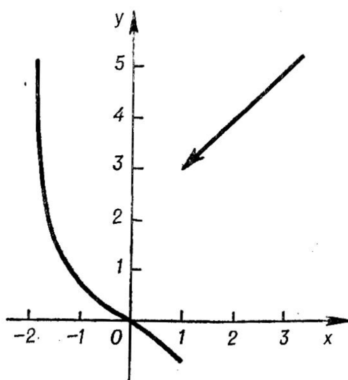
Taigi funkcija $f(x)$ taške a turi ribą tada ir tik tada, kai: a) ji turi kairiąją ribą; b) turi dešiniąją ribą; c) abi vienpusės ribos yra lygios.

1 pavyzdys. Sakykime (48 pav.),

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$



48 pav.



49 pav.

Ta funkcija yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje. Kadangi $f(x)=-x$, kai x tenkina nelygybę $x<0$, tai

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}(-x)=0.$$

Analogiškai

$$f(+0)=\lim_{x\to+0} x=0.$$

Taigi $f(+0)=f(-0)=0$.

Kadangi vienpusės ribos taške 0 yra lygios, tai funkcija $f(x)$ taške 0 turi ribą, kuri yra lygi vienpusėms riboms, t.y.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

2 pavyzdys. Sakykime (49 pav.),

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \leqslant 1, \\ 2+x, & x > 1. \end{cases}$$

Ši funkcija yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje. Rasime vienpuses jos ribas taške $x=1$:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0} (-x^3) = -1,$$

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0} (2+x) = 3.$$

Taigi $f(1-0) \neq f(1+0)$. Vadinasi, duotoji funkcija neturi ribos taške $x=1$.

Pratimas

2. Nustatykite, ar šios funkcijos turi ribą taškuose -2; -1; 0; 1; 2:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x>0, \\ -1, & x \leqslant 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x>0, \\ x^2, & x \leqslant 0; \end{cases}$

c) $f(x) = [x]$; d) $f(x) = \dfrac{x+|x|}{x}$;

e) $f(x) = \{x\}$; f) $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x \geqslant 2, \\ x, & x<2. \end{cases}$

3. Ribos vienaties teorema.

Teorema. *Funkcija negali turėti taške dviejų skirtingų ribų.*

Įrodymas. Įrodinėsime prieštaravimo būdu. Sakykime, funkcija $f(x)$ taške $x=a$ turi dvi skirtingas ribas A ir B.

Remiantis ribos apibrėžimu, kiekvienam $\varepsilon>0$ egzistuoja tokie $\delta_1(\varepsilon)>0$ ir $\delta_2(\varepsilon)>0$, kad visiems $x \neq a$, tenkinantiems atitinkamai nelygybes $|x-a| < \delta_1$ ir $|x-a| < \delta_2$, yra teisingos nelygybės

$$|f(x)-A| < \varepsilon \text{ ir } |f(x)-B| < \varepsilon.$$

Apibrėžę $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ir paėmę kokį nors $x \neq a$, tenkinantį nelygybę $|x-a| < \delta$, gausime

$$|A-B| = |[A-f(x)] + [f(x)-B]| \leqslant$$
$$\leqslant |A-f(x)| + |f(x)-B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Imkime $\varepsilon = \frac{|A-B|}{4}$. Tada

$$|A-B| < \frac{1}{2}|A-B|,$$

bet ta nelygybė yra klaidinga. Taigi mūsų prielaida buvo neteisinga, todėl $A=B$. Teorema įrodyta.

4. Ribų teoremos. Pagrindinės funkcijų ribų teoremos (apie sumos, sandaugos ir dalmens ribas), palengvinančios ribų skaičiavimą, yra analogiškos panašioms sekų ribų teoremoms.

1 teorema. *Funkcijų sumos (skirtumo) riba yra lygi tų funkcijų ribų, jei tik jos egzistuoja, sumai (skirtumui):*

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x).$$

2 teorema. *Funkcijų sandaugos riba yra lygi tų funkcijų ribų, jei tik jos egzistuoja, sandaugai:*

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Išvada. *Pastovų daugiklį galima iškelti prieš ribos ženklą, t.y.*

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x),$$

jeigu tik $\lim_{x\to a} f(x)$ *egzistuoja.*

3 teorema. *Dviejų funkcijų santykio riba yra lygi tų funkcijų ribų, jeigu tik jos egzistuoja, santykiui, t.y.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},$$

jeigu tik $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

1—3 teoremų neįrodinėsime.

Nagrinėjant funkcijų ribas, kartais naudinga remtis tarpinės funkcijos ribos teorema.

4 teorema. *Jeigu*

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = B, \quad \lim_{x\to a}\psi(x) = B$$

ir kokioje nors taško a aplinkoje, išskyrus galbūt patį tašką a, yra teisingos nelygybės

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x),$$

tai

$$\lim_{x\to a} f(x) = B.$$

Įrodymas. Remiantis funkcijos ribos taške apibrėžimu, kiekvienam $\varepsilon>0$ egzistuoja tokie $\delta_1(\varepsilon)>0$ ir $\delta_2(\varepsilon)>0$, kad visiems $x\neq a$, tenkinantiems nelygybes $|x-a|<\delta_1$ ir $|x-a|<\delta_2$, yra teisingos nelygybės

$$|\psi(x)-B|<\varepsilon \text{ ir } |\varphi(x)-B|<\varepsilon.$$

Apibrėžę $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$, gausime: visiems x, tenkinantiems sąryšį $0<|x-a|<\delta$, yra teisingos nelygybės

$$B-\varepsilon<\varphi(x)<B+\varepsilon \text{ ir } B-\varepsilon<\psi(x)<B+\varepsilon,$$

taigi

$$B-\varepsilon<\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)<B+\varepsilon.$$

Vadinasi, $B-\varepsilon<f(x)<B+\varepsilon$, kai $0<|x-a|<\delta$, o tai ir reiškia, kad

$$\lim_{x\to a} f(x)=B.$$

Teorema įrodyta.

1 pavyzdys. Raskime $\lim\limits_{x\to 1}(9x^2-6x+8)$.

Sprendimas. Remdamiesi funkcijų sumos, skirtumo ir sandaugos ribų teoremomis, gauname

$$\lim_{x\to 1}(9x^2-6x+8)=\lim_{x\to 1}(9x^2)-\lim_{x\to 1}(6x)+\lim_{x\to 1}8=9\lim_{x\to 1}x^2-6\lim_{x\to 1}x+8=$$

$$=9(\lim_{x\to 1}x)\cdot(\lim_{x\to 1}x)-6\cdot 1+8=9\cdot 1\cdot 1-6\cdot 1+8=11.$$

2 pavyzdys. Raskime $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Sprendimas. Vardiklio riba lygi nuliui, todėl negalima remtis dalmens ribos teorema. Skaitiklį išskaidysime dauginamaisiais:

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2).$$

Kadangi, ieškant ribos taške 2, yra nagrinėjami tik $x\neq 2$, tai galima suprastinti iš $x-2$; taigi

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-3)=2-3=-1.$$

3 pavyzdys. Raskime $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Sprendimas. Iš pradžių įrodysime, kad

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1.$$

Kiekvienam $x>0$

$$|\sqrt{x}-1|=\frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1}\leqslant|x-1|,$$

todėl, imdami bet kokį $\varepsilon>0$ ir $\delta=\varepsilon$, gausime

$$|\sqrt{x}-1|<\varepsilon$$

visiems $x>0$, tenkinantiems nelygybę $0<|x-1|<\delta$. Tai reiškia, kad $\sqrt{x}\to 1$, kai $x\to 1$.

Dabar

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=1+1=2.$$

Pratimas

3. Raskite šias ribas:

a) $\lim\limits_{x\to 4}(x^4-2x+5)$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-11}{8x^2+5}$;

c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$; d) $\lim\limits_{x\to +2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

5. Funkcijos riba, kai $x\to\infty$. Begalinė funkcijos riba. Tiriant funkcijos savybes, tenka nagrinėti jos ribą begalybėje (t.y. kai $x\to\infty$), begalinę ribą taške, taip pat begalinę ribą begalybėje.

Smulkiau išnagrinėsime funkcijos ribą begalybėje, t.y. kai $x\to\infty$.

Imkime funkciją

$$f(x)=1-\frac{4}{x^2+3}.$$

Akivaizdu, kad, didėjant $|x|$, trupmenos $\dfrac{4}{x^2+3}$ vardiklis didėja, todėl tos funkcijos reikšmių moduliai yra kiek norima maži. Taigi, kai $|x|$ reikšmės yra didelės, funkcijos $f(x)$ reikšmės mažai skiriasi nuo 1. Tuo atveju sakoma, kad funkcijos $f(x)$ riba lygi 1, kai $x\to\infty$, ir rašoma $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$.

Apibrėžimas. Sakykime, funkcija $f(x)$ yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje. Skaičius B yra vadinamas $f(x)$ riba, kai $x\to\infty$, jeigu kiekvienam $\varepsilon>0$ egzistuoja toks $M>0$, kad visiems x, tenkinantiems sąlygą $|x|>M$, yra teisinga nelygybė $|f(x)-B|<\varepsilon$.

Tuo atveju rašoma

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=B.$$

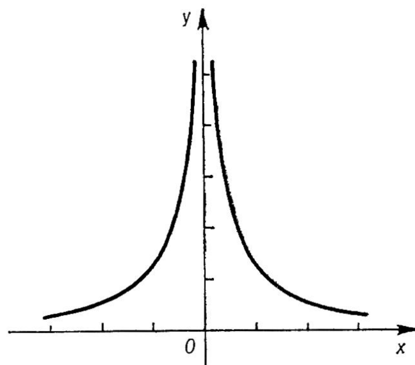
Daugeliu atvejų funkcija $f(x)$ kinta skirtingai, kai $x\to+\infty$ ir kai $x\to-\infty$.

Pavyzdžiui, funkcijai $f(x)=\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}$, apibrėžtai visiems $x\neq 1$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}=-3,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}=3.$$

Todėl, tiriant funkcijos savybes, yra nagrinėjamos ir $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, ir $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Funkcijos $f(x)$ riba, kai $x\to+\infty$ ir kai $x\to-\infty$, yra apibrėžiama analogiškai, kaip ir $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, tik apibrėžimo formuluotėje sąlygą $|x|>M$ reikia pakeisti atitinkama sąlyga $x>M$ ir $x<-M$.



50 pav.

Be išnagrinėtosios funkcijos $f(x)$ baigtinės ribos, kai $x\to a$ (arba $x\to\infty$), vartojama ir begalinės ribos sąvoka. Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=\frac{1}{x^2}$, apibrėžta visiems $x\neq 0$ (50 pav.), įgyja kiek norima dideles reikšmes, kai $x\to 0$. Tuo atveju sakoma, kad funkcijos riba taške $x=0$ yra begalybė, ir rašoma $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

Suformuluosime b e g a l i n ė s r i b o s apibrėžimą: jeigu kiekvienam skaičiui $M>0$ egzistuoja toks $\delta>0$, kad visiems x, tenkinantiems sąlygą $0<|x-a|<\delta$, yra teisinga nelygybė $|f(x)|>M$, tai sakoma, kad *funkcijos $f(x)$ riba taške a yra begalybė*, ir rašoma

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty.$$

Jeigu šiame apibrėžime sąlygą $0<|x-a|<\delta$ pakeisime sąlyga $a-\delta<x<a$ (arba $a<x<a+\delta$), tai gausime funkcijos $f(x)$ begalinės ribos iš kairės (arba iš dešinės) taške a apibrėžimą.

Matematikoje ir jos taikymuose taip pat yra vartojama ir begalinės ribos begalybėje, t.y. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, sąvoka, kuri apibrėžiama šitaip: jeigu kiekvienam skaičiui $M>0$ egzistuoja toks $M_0>0$, kad visiems x, tenki-

nantiems sąlygą $|x|>M_0$, yra teisinga nelygybė $|f(x)|>M$, tai sakoma, kad funkcija $f(x)$ *begalybėje* turi *begalinę ribą*. Pavyzdžiui, $\lim_{x\to\infty} x^2=+\infty$, nes, kaip žinote, parabolės grafiko šakos kyla į viršų, didėjant $|x|$ reikšmėms.

1 pavyzdys. Rasime ribą

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}.$$

Sprendimas. Padalysime skaitiklį ir vardiklį iš x^3, tada

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{14}{x^3}-\frac{1}{x}-1}=\frac{3}{-1}=-3.$$

2 pavyzdys. Rasime $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Sprendimas.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

Jeigu $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, tai funkcija $f(x)$ yra vadinama *neaprėžtai didėjančia, kai* $x\to a$. Jeigu $\lim_{x\to a} f(x)=0$, tai funkcija $f(x)$ yra vadinama *nykstančia*, kai $x\to a$. Analogiškai apibrėžiamos neaprėžtai didėjančios ir nykstančios funkcijos, kai $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$.

Funkcijos, kaip ir sekos, turi šitokią savybę: jeigu funkcija $f(x)$ yra nykstanti, kai $x\to a$ ir $f(x)\neq 0$ visiems $x\neq a$ iš kokios nors taško a aplinkos, tai funkcija $\frac{1}{f(x)}$ yra neaprėžtai didėjanti, kai $x\to a$. Ir atvirkščiai: jeigu funkcija $f(x)$ yra neaprėžtai didėjanti, kai $x\to a$, tai funkcija $\frac{1}{f(x)}$ yra nykstanti, kai $x\to a$.

3 pavyzdys. Funkcija $f(x)=x$ yra nykstanti, kai $x\to 0$, ir neaprėžtai didėjanti, kai $x\to\infty$, taip pat ir kai $x\to-\infty$ ir kai $x\to+\infty$.

Funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ yra nykstanti, kai $x\to\infty$ (kai $x\to+\infty$ ir kai $x\to-\infty$), ir neaprėžtai didėjanti, kai $x\to 0$ (analogiškai kai $x\to+0$ ir kai $x\to-0$).

4 pavyzdys. Funkcija $f(x)=[x]$ (sveikoji x dalis) yra neaprėžtai didėjanti, kai $x\to\infty$ (kai $x\to-\infty$ ir kai $x\to+\infty$).

Funkcija $f(x)=\{x\}$ (trupmeninė x dalis) yra nykstanti, kai $x\to+0$, ir nėra nykstanti, kai $x\to-0$, nes lengvai galima įrodyti, kad

$$\lim_{x\to+0}\{x\}=\lim_{x\to+0}x=0;\quad \lim_{x\to-0}\{x\}=\lim_{x\to-0}(1+x)=1.$$

4. Apskaičiuokite ribas:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-3x}{2x+3}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-5x-6}{7x^2+8x-9}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{x^3-2x^2-3x}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

§ 13. TOLYDŽIOSIOS FUNKCIJOS

1. Tolydžiosios funkcijos sąvoka. Pirmą kartą su tolydžiosiomis funkcijomis susidūrėte ir rėmėtės jų savybėmis, braižydami paprasčiausių funkcijų grafikus, nors termino „tolydžioji funkcija" ir nevartojote, tuo labiau jums nebuvo apibrėžta ta sąvoka. Pirmiausia paprasčiausių funkcijų, pavyzdžiui, $y=ax+b$, $y=ax^2$ arba $y=ax^3$, grafikai braižomi, jungiant rastus taškus. Būtent sudaroma funkcijos reikšmių, atitinkančių tam tikras argumento reikšmes, lentelė, po to plokštumoje su duota koordinačių sistema žymimi taškai, kurių koordinatės surašytos lentelėje; sujungus pažymėtus taškus ištisine linija, gaunamas funkcijos grafikas. Tačiau taip galima daryti tik tais atvejais, kai funkcija yra tolydi (tada jos grafikas yra ištisinė linija).

Apibrėžimas. Funkcija $f(x)$, $x\in]a;\,b[$, yra vadinama *tolydžia taške* $x_0\in]a;\,b[$, jeigu tos funkcijos riba taške x_0 egzistuoja ir yra lygi funkcijos reikšmei tame taške:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Jeigu funkcija f yra tolydi taške x_0, tai, remiantis apibrėžimu, turi būti išpildytos šios sąlygos:

1) funkcija f turi būti apibrėžta taške x_0;
2) funkcija f turi turėti ribą taške x_0;
3) funkcijos f riba taške x_0 turi sutapti su funkcijos reikšme tame taške.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=x^2$ yra apibrėžta visoje skaičių tieseje ir

$$\lim_{x\to 1} x^2=1.$$

Kadangi $f(1)=1$, t.y. $f(x)=x^2$ reikšmė taške $x=1$ sutampa su riba, kai $x\to 1$, tai, remiantis apibrėžimu, funkcija $f(x)=x^2$ yra tolydi taške $x=1$.

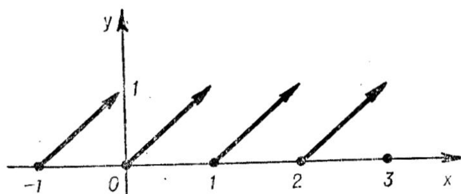
Remiantis funkcijos kairiosios ir dešiniosios ribų apibrėžimais, galima apibrėžti funkcijos tolydumą iš kairės ir iš dešinės, būtent: funkcija yra vadinama *tolydžia iš kairės taške* x_0, jeigu $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, ir *tolydžia iš dešinės taške* x_0, jeigu $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Pavyzdžiui, funkcija

$$f(x)=\{x\}$$

($\{x\}$ – skaičiaus x trupmeninė dalis) yra tolydi visur, išskyrus sveikąsias argumento reikšmes, kuriose ji yra tolydi iš dešinės (51 pav.).

Tolydžiosios funkcijos sąvoką galima apibrėžti ir kitaip, remiantis funkcijos ir argumento pokyčiais.



51 pav.

Sakykime, duota funkcija $f(x)$, $x\in]a;b[$, ir kokia nors argumento reikšmė x_0 iš intervalo $]a;b[$. Jeigu $x\in]a;b[$ yra kita fiksuota argumento reikšmė, tai skirtumas $x-x_0$ vadinamas *argumento pokyčiu* ir žymimas Δx, t.y. $\Delta x=x-x_0$. Taigi $x=x_0+\Delta x$.

Skirtumas

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

yra vadinamas *funkcijos f pokyčiu* taške x_0 ir žymimas Δf.

Jeigu funkcija f yra tolydi taške x_0, tai, remiantis apibrėžimu,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

todėl $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$, vadinasi, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$.

Iš paskutiniojo sąryšio išplaukia: jeigu $f(x)$ yra tolydi taške x_0, tai mažą argumento pokytį atitinka mažas funkcijos pokytis arba, tiksliau, funkcijos $f(x)$ pokytis yra nykstanti funkcija, kai $\Delta x\to 0$.

Vadinasi, tolydžios taške funkcijos sąvoką galima apibrėžti šitaip: funkcija $f(x)$, $x\in]a;b[$, vadinama *tolydžia taške* $x_0\in]a;b[$, jeigu jos pokytis tame taške yra nykstanti funkcija, kai $\Delta x\to 0$.

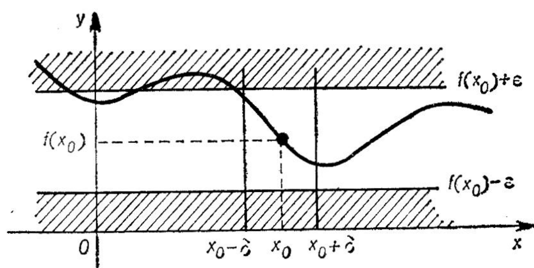
2. Geometrinė funkcijos tolydumo prasmė. Paaiškinsime funkcijos tolydumo taške geometrinę prasmę. Sakykime, funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0. Remiantis tolydumo apibrėžimu, kiekvienam $\varepsilon>0$ egzistuoja toks $\delta>0$, kad $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, kai $|x-x_0|<\delta$, arba

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon, \tag{1}$$

kai $x_0-\delta<x<x_0+\delta$.

(1) sąryšis reiškia, kad reikšmės $f(x)$ priklauso anksčiau parinktai taško $f(x_0)$ ε-aplinkai, kai x priklauso taško x_0 δ-aplinkai. Vadinasi, jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0, tai Ox ašyje yra tokia taško x_0 δ-aplinka, kad kiekvieną reikšmę x iš tos aplinkos atitinkanti funkcijos $f(x)$ reikšmė priklauso iš anksto parinktai Oy ašyje taško $f(x_0)$ ε-aplinkai.

Tad funkcijos tolydumą taške galime aiškinti geometriškai (žr. 52 pav.). Imame $\varepsilon>0$ ir nubrėžiame dvi tieses, lygiagrečias Ox ašiai, per taškus $(0; f(x_0)+\varepsilon)$ ir $(0; f(x_0)-\varepsilon)$; gauname 2ε pločio juostą. Iš (1) nelygybės išplaukia, kad atitinkama duotosios funkcijos grafiko dalis visa priklauso tai juostai, jeigu tik x priklauso taško x_0 δ-aplinkai, t.y. intervalui $]x_0-\delta; x_0+\delta[$. Taigi funkcijos $f(x)$ tolydumas taške x_0 geometriškai reiškia: kad ir kokią siaurą 2ε pločio juostą imtume, egzistuos tokia taško x_0 δ-aplinka, kad funkcijos $f(x)$ grafikas bus toje juostoje, jeigu tik argumento reikšmės priklausys taško x_0 δ-aplinkai.

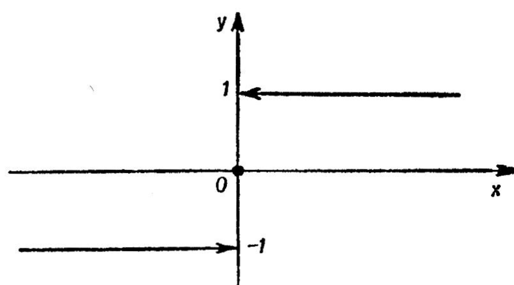


52 pav.

3. Pavyzdžiai.

1 pavyzdys. Ištirsime funkcijos $f(x)=\operatorname{sgn} x$ tolydumą taške $x_0=0$ (53 pav.). Ši funkcija

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & \text{kai } x>0, \\ 0, & \text{kai } x=0, \\ -1, & \text{kai } x<0. \end{cases}$$



53 pav.

Iš funkcijos išraiškos išplaukia, kad

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}(-1)=-1,$$

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}1=1.$$

Taigi $f(-0)\neq f(+0)$, t.y. vienpusės ribos egzistuoja, bet yra skirtingos, todėl funkcija $f(x)=\operatorname{sgn} x$ neturi ribos, vadinasi, nėra tolydi taške $x_0=0$.

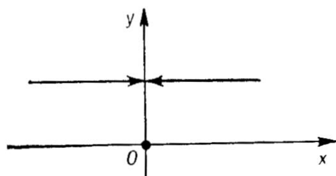
2 pavyzdys. Sakykime,

$$f(x)=|\operatorname{sgn} x|.$$

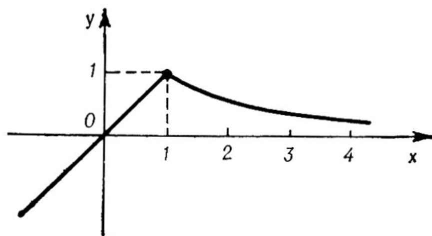
Ištirsime, ar ši funkcija tolydi taške $x_0=0$ (54 pav.).
Kadangi $f(x)=1$, kai $x\neq 0$, tai

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1.$$

Taigi tos funkcijos riba taške $x_0=0$ egzistuoja, bet ji nėra lygi $f(0)$, nes $f(0)=0$; todėl funkcija $f(x)=|\operatorname{sgn} x|$ nėra tolydi taške $x_0=0$.



54 pav.



55 pav.

3 pavyzdys. Sakykime, duota funkcija (55 pav.)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{kai } x\geqslant 1,\\ x, & \text{kai } x<1.\end{cases}$$

Ištirsime, ar ta funkcija yra tolydi taške $x_0=1$. Kadangi

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} x=1,$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x}=1,$$

tai

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1.$$

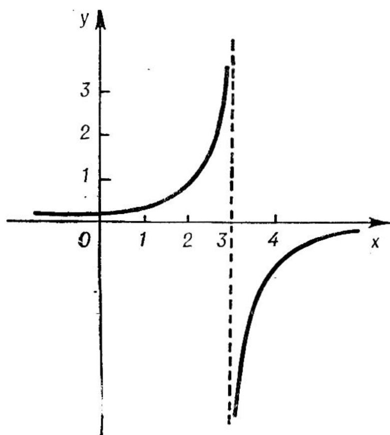
Nustatėme, kad funkcijos riba taške $x_0=1$ egzistuoja ir yra lygi funkcijos reikšmei, o tai reiškia, kad nagrinėjamoji funkcija yra tolydi taške $x_0=1$.

4 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=\frac{1}{3-x}$, $x\in]-\infty;+\infty[$, $x\neq 3$ (56 pav.).
Nagrinėjamoji funkcija nėra tolydi taške $x_0=3$, nes ji neapibrėžta, kai $x=3$.

4. Funkcijos tolydumas aibėje.

Apibrėžimas. Funkcija vadinama *tolydžia intervale* $]a;b[$, jeigu ji yra tolydi kiekviename to intervalo taške. Funkcija vadinama *tolydžia atkarpoje* $[a;b]$, jeigu ji yra tolydi intervale $]a;b[$, taške a tolydi iš dešinės ir taške b tolydi iš kairės.

Jeigu funkcija yra tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai, remiantis apibrėžimu, taškuose a ir b (atkarpos $[a; b]$ galuose) ji yra tolydi tik iš vienos pusės. Apibrėžime nereikalaujama, kad tuose taškuose ji būtų tolydi.



56 pav.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=\sqrt{-x^2+3x-2}$, kai $1\leqslant x\leqslant 2$, yra tolydi toje atkarpoje, nes ji yra tolydi kiekviename intervalo $]1; 2[$ taške, tolydi iš dešinės taške $x=1$ ir tolydi iš kairės taške $x=2$.

5. Trūkio taškai. Jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0, tai taškas x_0 yra vadinamas funkcijos $f(x)$ *tolydumo tašku.* Priešingu atveju, t.y. kai funkcijos $f(x)$ riba taške x_0 neegzistuoja arba egzistuoja, bet nėra lygi $f(x_0)$, tai funkcija $f(x)$ vadinama *trūkia* taške x_0, o taškas x_0 vadinamas funkcijos $f(x)$ *trūkio tašku.* Atskiru atveju, jeigu funkcija $f(x)$ yra apibrėžta visuose intervalo $]a; b[$ taškuose, išskyrus tašką $x_0\in]a; b[$, tai x_0 taip pat yra funkcijos $f(x)$ trūkio taškas.

Iš to išplaukia, kad trūkio taške funkcija gali būti apibrėžta, bet negali būti tolydi (žr. 3 skirsnį, 1, 2 pavyzdžius), gali būti tame taške neapibrėžta, bet apibrėžta kokioje nors „pradurtoje" to taško aplinkoje (pavyzdžiui, toks yra taškas $x_0=3$ anksčiau išnagrinėtame 3 skirsnio 4 pavyzdyje).

Pirmuoju atveju trūkio taškas priklauso funkcijos apibrėžimo sričiai (1, 2 pavyzdžiai), antruoju atveju – nepriklauso (4 pavyzdys).

Trūkio taškai būna dviejų rūšių: pirmosios rūšies ir antrosios.

Funkcijos trūkio taškas vadinamas *pirmosios rūšies trūkio tašku,* jeigu funkcija tame taške turi baigtines ribas iš kairės ir iš dešinės. Visais kitais atvejais trūkio taškas vadinamas antrosios rūšies trūkio tašku.

Anksčiau išnagrinėtuose pavyzdžiuose taškas $x_0=0$ (žr. 1, 2 pavyzdžius) yra pirmosios rūšies trūkio taškas, o taškas $x_0=3$ (žr. 4 pavyzdį) – antrosios rūšies trūkio taškas. Iš tikrųjų, jeigu $f(x)=\operatorname{sgn} x$, tai

$$f(-0)=-1,$$

$$f(+0)=1.$$

Taigi vienpusės funkcijos $f(x)$ ribos taške $x_0=0$ egzistuoja ir yra baigtinės, o tai, remiantis apibrėžimu, ir reiškia, kad taškas $x_0=0$ yra tos funkcijos pirmosios rūšies trūkio taškas.

Dabar įrodysime, kad taškas $x_0=3$ yra funkcijos $f(x)=\frac{1}{3-x}$ antrosios rūšies trūkio taškas. Raskime tos funkcijos kairiąją ir dešiniąją ribas taške $x_0=3$:

$$f(3-0)=\lim_{x\to3-0}\frac{1}{3-x}=+\infty,$$

$$f(3+0)=\lim_{x\to3+0}\frac{1}{3-x}=-\infty.$$

Taigi vienpusės funkcijos $f(x)$ ribos taške $x_0=3$ yra begalinės, o tai, remiantis apibrėžimu, ir reiškia, kad taške $x_0=3$ funkcija $f(x)$ turi antrosios rūšies trūkį.

Braižant trūkių funkcijų grafikus, reikia turėti omenyje štai ką: jeigu x_0 yra funkcijos $f(x)$ pirmosios rūšies trūkio taškas, tai tos funkcijos grafikas taške x_0 daro baigtinį šuolį, lygų $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ (jeigu $f(x_0+0)\neq$ $\neq f(x_0-0)$); jeigu x_0 yra funkcijos $f(x)$ antrosios rūšies trūkio taškas, tai bent viena vienpusė riba, arba kairioji, arba dešinioji, taške x_0 neegzistuoja arba yra begalinė. 1 pavyzdyje funkcijos $f(x)$ grafikas taške $x_0=0$ daro šuolį:

$$f(+0)-f(-0)=1-(-1)=2.$$

4 pavyzdyje funkcijos $f(x)=\frac{1}{3-x}$ kairioji ir dešinioji ribos taške $x_0=0$ yra begalinės.

Pratimas

1. Ištirkite tolydumą šių funkcijų:

a) $f(x)=2x+1$ taškuose $x=1$, $x=-1$;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\leqslant0, \\ 0, & x>0, \end{cases}$ taškuose $x=0$, $x=-1$ ir $x=1$;

c) $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant0, \\ 1+x^2, & x>0, \end{cases}$ taškuose $x=-1$, $x=0$ ir $x=2$;

d) $f(x)=x-|x|$ taškuose $x=-4$, $x=0$ ir $x=3$;

e) $f(x)=\begin{cases} 2|x|, & |x|\leqslant1, \\ 1, & |x|>1, \end{cases}$ taškuose $x=-1$, $x=0$ ir $x=3$.

6. Asimptotės. Tiesė $y=kx+b$ vadinama funkcijos $f(x)$ grafiko *asimptote*, kai $x\to+\infty$, jeigu

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0.$$

Taigi, jeigu tiesė $y=kx+b$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko asimptotė, kai $x\to+\infty$, tai funkcija

$$\alpha(x)=f(x)-kx-b$$

yra nykstanti, kai $x\to+\infty$.

Iš čia išplaukia, kad

$$k=\frac{f(x)}{x}-\frac{b+\alpha(x)}{x},$$

todėl

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},$$

nes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b+\alpha(x)}{x}=0.$$

Toliau,

$$b=f(x)-kx-\alpha(x),$$

todėl

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx].$$

Analogiškai apibrėžiama ir randama funkcijos $f(x)$ grafiko asimptotė, kai $x\to-\infty$.

1 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=\frac{3x^2+1}{x}$.

Tada

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=3,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Taigi tiesė $y=3x$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko asimptotė, kai $x\to+\infty$. Nesunku įsitikinti, kad ta pati tiesė $y=3x$ yra asimptotė, kai $x\to-\infty$. Tos funkcijos grafikas pavaizduotas 57 paveiksle.

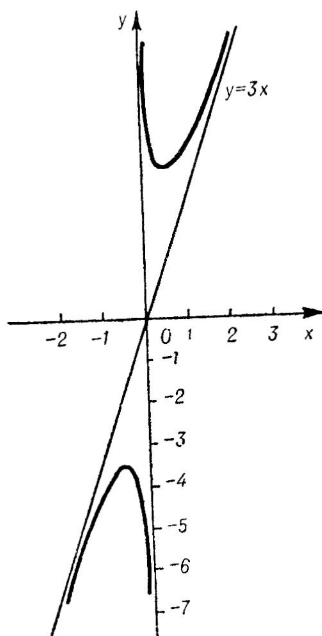
2 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=\frac{2x^2+x}{x+1}$.

Kadangi

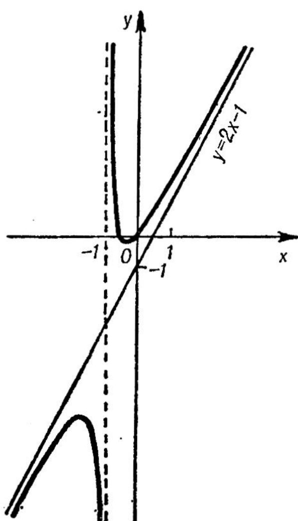
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x(x+1)}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x}{x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{x+1}\right)=-1,$$

tai tiesė $y=2x-1$ yra funkcijos grafiko asimptotė, kai $x\to-\infty$ ir kai $x\to+\infty$. Tas grafikas pavaizduotas 58 paveiksle.



57 pav.



58 pav.

3 pavyzdys. Sakykime, duota funkcija

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

Apskaičiuosime ribas:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}-2x]=0.$$

Taigi tiesė $y=x$ yra duotosios funkcijos grafiko asimptotė, kai $x\to+\infty$. Dabar rasime ribas, kai $x\to-\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x}=-1,$$

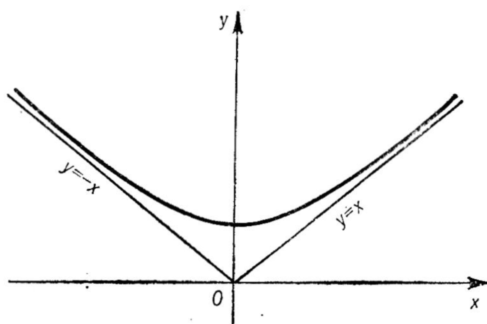
$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=\frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}+2x]=0.$$

Vadinasi, tiesė $y=-x$ yra duotosios funkcijos grafiko asimptotė, kai $x\to-\infty$. Tą grafiką matome 59 paveiksle.

Tiesė $x=a$ vadinama *vertikaliąja funkcijos* $f(x)$ grafiko asimptote, kai

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\infty \text{ arba } \lim_{x\to a+0}f(x)=\infty.$$

Atkreipsime dėmesį, kad, ieškant funkcijos $f(x)$ grafiko vertikaliosios asimptotės, taško a, per kurį būtų galima ją nubrėžti, reikia ieškoti tarp duotosios funkcijos antrosios rūšies trūkio taškų.

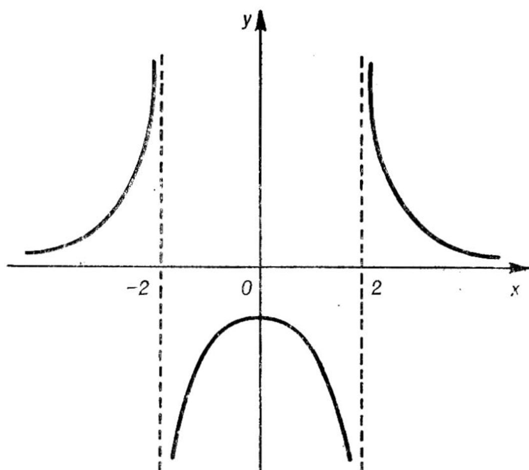


59 pav.

4 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=\frac{4}{x^2-4}$.
Nagrinėsime taškus $x=2$ ir $x=-2$. Turime

$$\lim_{x\to\pm 2} f(x)=\lim_{x\to\pm 2}\frac{4}{x^2-4}=\infty,$$

todėl tiesės $x=2$ ir $x=-2$ yra duotosios funkcijos grafiko vertikaliosios asimptotės.



60 pav.

Funkcijos $f(x)=\frac{4}{x^2-4}$ grafikas pavaizduotas 60 paveiksle.

5 pavyzdys. Sakykime, duota funkcija $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}$.

Nagrinėsime taškus $x=0$ ir $x=1$, kuriuose ta funkcija nėra apibrėžta. Tuose taškuose

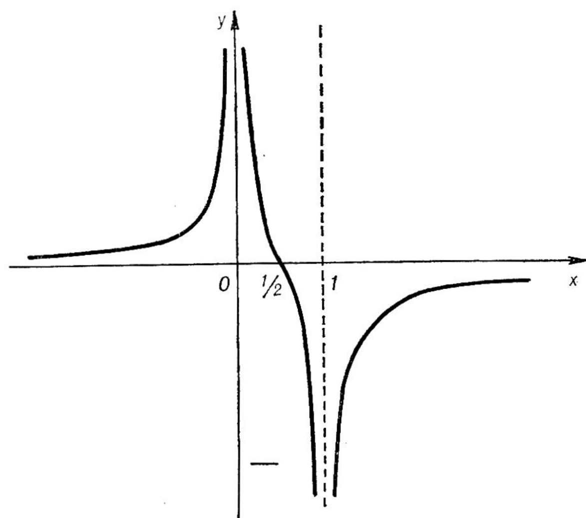
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=-\infty.$$

Vadinasi, tiesės $x=0$ ir $x=1$ yra nagrinėjamos funkcijos grafiko vertikaliosios asimptotės.

Be to, tiesė $y=0$ yra funkcijos grafiko asimptotė, kai $x\to\pm\infty$.

Funkcijos grafikas pavaizduotas 61 paveiksle.



61 pav.

7. Tolydžiųjų funkcijų savybės. Šiame skirsnyje nagrinėsime funkcijas, apibrėžtas toje pačioje aibėje, pavyzdžiui, kokiame nors intervale. Pateiksime be įrodymo kai kurias teoremas.

1 teorema. *Baigtinio skaičiaus tolydžių taške a funkcijų suma yra tolydi tame taške funkcija.*

2 teorema. *Baigtinio skaičiaus tolydžių taške a funkcijų sandauga yra tolydi tame taške funkcija.*

3 teorema. *Dviejų tolydžių taške a funkcijų santykis yra tolydi tame taške funkcija, jeigu vardiklio funkcijos reikšmė tame taške nėra lygi nuliui.*

Pastaba. 1—3 teoremos yra teisingos ir tuo atveju, kai funkcijos yra tolydžios intervale.

Remiantis 1—3 teoremomis, galima nustatyti plačios funkcijų klasės tolydumą.

1 pavyzdys. Funkcija $f(x)=x^n$, kai $n\in N$, yra tolydi visoje skaičių tiesėje.

Kadangi

$$f(x)=x^n=\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ daugiklių}},$$

tai, remdamiesi 2 teorema ir turėdami omenyje x tolydumą, gausime, kad ta funkcija yra tolydi visoje skaičių tiesėje.

2 pavyzdys. $f(x)=c \cdot x^n$ (c – konstanta) yra tolydi visoje skaičių tiesėje.

Iš 2 teoremos ir 1 pavyzdžio išplaukia, kad tas tvirtinimas yra teisingas.

4 teorema. *Polinomas yra funkcija, tolydi visoje skaičių tiesėje.*

Įrodymas. Sakykime,

$$f(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1} x+a_n.$$

Funkcijos $f_0(x)=a_0x^n$, $f_1(x)=a_1x^{n-1}$, ..., $f_{n-1}(x)=a_{n-1}x$, $f_n(x)=a_n$ yra tolydžios visoje skaičių tiesėje (žr. 2 pavyzdį). Vadinasi, nagrinėdami polinomą kaip funkcijų $f_i(x)$, $i=0, 1, \ldots, n$, sumą, pagal 1 teoremą įsitikiname, kad polinomas yra funkcija, tolydi skaičių tiesėje R.

5 teorema. *Kiekviena trupmeninė racionalioji funkcija yra tolydi kiekviename savo apibrėžimo srities taške.*

Įrodymas. Trupmeninė racionalioji funkcija yra

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)};$$

čia $P(x)$ ir $Q(x)$ – kokie nors polinomai.

Kadangi $P(x)$ ir $Q(x)$ yra tolydūs visoje skaičių tiesėje, o funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srityje polinomas $Q(x)$ nėra lygus nuliui, tai $f(x)$ yra tolydi savo apibrėžimo srityje (žr. 3 teoremą).

Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=\frac{3-x}{4x+7}$ yra tolydi visoje skaičių tiesėje, išskyrus tašką $x=-\frac{7}{4}$, kuriame trupmenos vardiklis lygus nuliui. Funkcija

$$f(x)=\frac{x^3+4x^2+x+1}{x^2+x+1}$$

yra tolydi visoje R, nes vardiklis nė viename taške nelygus nuliui.

Tolydžios atkarpoje funkcijos turi svarbių savybių. Pateiksime kai kurias jų be įrodymo.

6 teorema. *Jeigu funkcija f tolydi atkarpoje $[a; b]$ ir jos galuose įgyja priešingų ženklų reikšmes, tai atkarpos $[a; b]$ viduje yra bent vienas taškas, kuriame tos funkcijos reikšmė lygi nuliui.*

7 teorema. *Jeigu funkcija tolydi atkarpoje, tai tarp reikšmių, kurias ji įgyja toje atkarpoje, yra didžiausia ir mažiausia. Be to, funkcija įgyja visas reikšmes, esančias tarp mažiausios ir didžiausios reikšmių.*

2. Raskite ribas:

a) $\lim\limits_{x\to -1}(4x-x^3)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-5)$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-8}{4x+2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+x^2}{2x^2+x+1}$; e) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$;

g) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{5x^2+4x-1}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^3-1}$; i) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^3-8}$;

j) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; k) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$; l) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$; p) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3}$.

§ 14. RODIKLINĖ IR LOGARITMINĖ FUNKCIJOS

1. Laipsniai ir logaritmai. VIII klasės algebros kurse jūs jau susipažinote su kai kuriomis laipsnių su racionaliaisiais rodikliais savybėmis. Priminsime jas.

Sakykime, a ir b yra teigiami realieji skaičiai, r, r_1 ir r_2 – bet kokie racionalieji skaičiai. Tada yra teisingi šie tvirtinimai:

1) $a^{r_1}\cdot a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$;

2) $(a^{r_1})^{r_2}=a^{r_1 r_2}$;

3) $(ab)^r=a^r b^r$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$;

5) jeigu $a>1$ ir $r_1<r_2$, tai $a^{r_1}<a^{r_2}$;

6) jeigu $0<a<1$ ir $r_1<r_2$, tai $a^{r_1}>a^{r_2}$;

7) jeigu $a<b$ ir $r>0$, tai $a^r<b^r$;

8) jeigu $a<b$ ir $r<0$, tai $a^r>b^r$.

Apibrėšime laipsnį su bet kokiu realiuoju rodikliu α.

Apibrėžimas. Sakykime, realusis skaičius α yra užrašytas kaip begalinė dešimtainė trupmena ir α_n, $n=1, 2, \ldots$, yra dešimtainių jo artinių su trūkumu seka. Tada kiekvieno realiojo skaičiaus $a>0$ laipsnis a^α yra apibrėžiamas lygybe

$$a^\alpha=\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}. \quad (1)$$

Įrodysime, kad kiekvienam realiajam skaičiui α ir kiekvienam realiajam skaičiui $a>0$ laipsnis a^α egzistuoja, t.y. egzistuoja (1) riba.

Kiekvieno realiojo skaičiaus α dešimtainių artinių su trūkumu seka (α_n) yra nemažėjanti ir aprėžta. Sakykime, pavyzdžiui, $\alpha_n \leqslant \beta$ visiems n; čia β – sveikasis skaičius. Tada, jeigu $a>1$, tai seka (a^{α_n}), remiantis laipsnių su racionaliaisiais rodikliais savybėmis, bus nemažėjanti ir aprėžta iš viršaus skaičiumi a^β; jeigu $0<a<1$, tai (a^{α_n}) bus nedidėjanti ir aprėžta iš apačios skaičiumi 0. Iš monotoninės aprėžtos sekos ribos teoremos išplaukia, kad (1) riba egzistuoja abiem atvejais.

Laipsniai su realiaisiais rodikliais turi visas laipsnių su racionaliaisiais rodikliais savybes. Suformuluosime jas.

Sakykime, a ir b yra teigiami realieji skaičiai, x, x_1, x_2 – bet kokie realieji skaičiai. Tada

1) $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$;

2) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$;

3) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

5) jeigu $a>1$ ir $x_1<x_2$, tai $a^{x_1}<a^{x_2}$;

6) jeigu $0<a<1$ ir $x_1<x_2$, tai $a^{x_1}>a^{x_2}$;

7) jeigu $a<b$ ir $x>0$, tai $a^x<b^x$;

8) jeigu $a<b$ ir $x<0$, tai $a^x>b^x$.

Laipsnių su realiaisiais rodikliais savybių neįrodinėsime.

VIII klasės algebros kurse buvo apibrėžtas skaičiaus logaritmas duotuoju pagrindu ir gana plačiai išnagrinėtos dešimtainių logaritmų savybės. Priminsime tą apibrėžimą ir suformuluosime pagrindines logaritmų savybes.

Apibrėžimas. Sakykime, $a>0$ ir $a\neq 1$. Skaičius α yra vadinamas *skaičiaus $b>0$ logaritmu pagrindu a, jeigu $a^\alpha=b$.*

Skaičiaus b logaritmas pagrindu a yra žymimas $\log_a b$. Remiantis apibrėžimu,

$$a^{\log_a b} = b.$$

Ta lygybė yra kita forma užrašytas logaritmo apibrėžimas.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad logaritmas yra apibrėžtas tik teigiamiems skaičiams. Tvirtinimo, kad kiekvieno teigiamo realiojo skaičiaus logaritmas yra apibrėžtas, neįrodysime.

Suformuluosime pagrindines logaritmų savybes.

Sakykime, a, x_1, x_2 ir x yra teigiami realieji skaičiai, be to, $a\neq 1$. Tada

1) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;

2) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;

3) jeigu $a>1$ ir $x_1<x_2$, tai $\log_a x_1<\log_a x_2$;

4) jeigu $0<a<1$ ir $x_1<x_2$, tai $\log_a x_1>\log_a x_2$.

Tie tvirtinimai betarpiškai išplaukia iš atitinkamų laipsnio savybių.

Iš logaritmo apibrėžimo ir laipsnio 1 savybės išplaukia, kad

$$x_1 x_2 = a^{\log_a x_1} a^{\log_a x_2} = a^{\log_a x_1 + \log_a x_2},$$

todėl

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Analogiškai

$$x^\alpha = (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha \log_a x},$$

vadinasi,

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

Dabar sakykime, $a>1$ ir $x_1<x_2$. Jeigu būtų $\log_a x_1 \geqslant \log_a x_2$, tai, remiantis laipsnio savybe, būtų

$$a^{\log_a x_1} \geqslant a^{\log_a x_2},$$

t.y. $x_1 \geqslant x_2$. Gautoji nelygybė prieštarauja nelygybei $x_1<x_2$. Vadinasi, turi būti

$$\log_a x_1 < \log_a x_2.$$

Analogiškai įrodoma ir logaritmų 4 savybė.

Iš logaritmų 1 ir 2 savybių išplaukia, kad

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Iš tikrųjų

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a (x_1 x_2^{-1}) = \log_a x_1 + \log_a x_2^{-1} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Baigdami įrodysime vieną naudingą formulę.

Sakykime, $a>0$, $b>0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ ir $c>0$.

Remiantis logaritmo apibrėžimu,

$$c = a^{\log_a c},$$

todėl (žr. logaritmų 2 savybę)

$$\log_b c = \log_a c \cdot \log_b a.$$

Ta formulė paprastai užrašoma kitaip:

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

ir vadinama *logaritmo pagrindo keitimo formule*. Remiantis gautąja formule, žinant logaritmus pagrindu b, galima rasti logaritmus pagrindu a. Ta formulė labai dažnai naudojama, sprendžiant logaritmines lygtis ir nelygybes.

Praktikoje dažniausiai naudojamasi dešimtainiais logaritmais, kurių pagrindas yra 10, ir natūriniais logaritmais, kurių pagrindas yra skaičius $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Dešimtainis skaičiaus b logaritmas yra žymimas $\lg b$, o natūrinis logaritmas – $\ln b$.

Pratimai

1. Palyginkite tarpusavyje šias skaičių poras:

a) $2^{1,7}$ ir $2^{0,8}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}$ ir $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,8}$;

c) $3^{0,7}$ ir $3^{\sqrt{\pi}}$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{0,6}$ ir $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$.

2. Duota seka $a_n=2^{3n-1}$.
Įrodykite, kad tos sekos narių rodikliai sudaro aritmetinę progresiją, o patys nariai – geometrinę progresiją. Raskite pirmosios progresijos skirtumą ir antrosios vardiklį.

3. Išspręskite lygtis:

a) $2^x=3$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2$; c) $5^x=\left(\frac{1}{5}\right)^x$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=-3$.

4. Apskaičiuokite:

a) $7^{\log_7 2}$; b) $0,1^{\log_{0,1} 4}$; c) $\log_a a^2\sqrt[3]{a^2}$;

d) $\log_5\log_2\log_3\log_2 512$.

2. Rodiklinė funkcija. Sakykime, duotas koks nors skaičius $a>0$, $a\neq 1$. Funkcija

$$y=a^x,\quad x\in R, \tag{1}$$

vadinama *rodikline funkcija.*

Remiantis apibrėžimu, rodiklinė funkcija yra apibrėžta visų realiųjų skaičių aibėje R. Jos reikšmių aibė yra visų teigiamų realiųjų skaičių aibė R_+.

Iš tikrųjų, kiekvienam $y_0>0$ egzistuoja $x_0=\log_a y_0$, todėl $a^{x_0}=y_0$.

Iš laipsnių 5 ir 6 savybių išplaukia, kad (1) rodiklinė funkcija yra didėjanti, kai $a>1$, ir mažėjanti, kai $0<a<1$.

1 teorema. *Rodiklinė funkcija yra tolydi kiekviename taške* $x_0\in R$.

Įrodymas. Remiantis funkcijos tolydumo taške apibrėžimu, reikia įrodyti, kad kiekvienam $\varepsilon>0$ egzistuoja toks $\delta>0$, kad

$$|a^x-a^{x_0}|<\varepsilon, \tag{2}$$

jeigu tik x tenkina nelygybę

$$|x-x_0|<\delta.$$

Akivaizdu, kad užtenka išnagrinėti atvejį, kai $\varepsilon < a^{x_0}$.

(2) nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$a^{x_0} - \varepsilon < a^x < a^{x_0} + \varepsilon.$$

Nagrinėsime skaičius $x_1 = \log_a (a^{x_0} - \varepsilon)$ ir $x_2 = \log_a (a^{x_0} + \varepsilon)$. Iš logaritmų savybių išplaukia, kad $x_1 < x_0 < x_2$, kai $a > 1$, ir $x_1 > x_0 > x_2$, kai $0 < a < 1$.

Sakykime, x tenkina nelygybę

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$$

kur δ yra mažiausias iš skaičių $|x_1 - x_0|$, $|x_2 - x_0|$. Tada

$$x_1 \leqslant x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \leqslant x_2,$$

kai $a > 1$, vadinasi,

$$a^{x_1} < a^x < a^{x_2}.$$

Jeigu $0 < a < 1$, tai

$$x_1 \geqslant x_0 + \delta > x > x_0 - \delta \geqslant x_2,$$

vadinasi,

$$a^{x_1} < a^x < a^{x_2}.$$

Įrodėme, kad yra teisinga (3) nelygybė, taigi ir (2) nelygybė, jeigu tik x tenkina nelygybę

$$|x_0 - x| < \delta,$$

kur δ yra parinktas nurodytu būdu.

Teorema įrodyta.

2 teorema. *Jeigu* $a > 1$, *tai*

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$

Įrodymas. Remiantis apibrėžimu,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

jeigu kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks δ, kad $f(x) > \varepsilon$, jeigu tik $x > \delta$. Šiuo atveju kiekvienam $\varepsilon > 0$ galima δ imti lygų $\log_a \varepsilon$. Iš tikrųjų, jeigu $x > \log_a \varepsilon$, tai $a^x > \varepsilon$.

Vadinasi, pirmasis teoremos tvirtinimas yra įrodytas. Įrodysime antrąjį tvirtinimą.

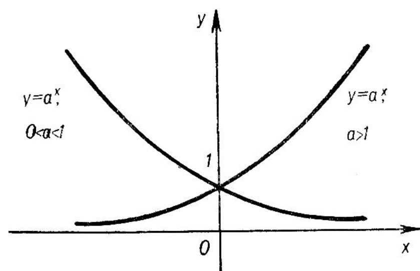
Remiantis apibrėžimu, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, jeigu kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks δ, kad $0 < a^x < \varepsilon$, jeigu tik $x < \delta$. Šiuo atveju δ galima imti lygų $\log_a \varepsilon$.

Teorema įrodyta.

Išvada. *Jeigu* $0 < a < 1$, *tai*

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

Rodiklinės funkcijos grafikų schema pateikta 62 paveiksle. Grafikai vaizdžiai iliustruoja ką tik išnagrinėtas pagrindines rodiklinės funkcijos savybes.



62 pav.

P r a t i m a i

5. Viename brėžinyje nubraižykite funkcijų $y=3^x$, $y=2^x$ ir $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ grafikus. Nurodykite, kuo tų funkcijų grafikai yra panašūs ir kuo jie skiriasi.

6. Padarykite tą patį, kai funkcijos yra

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^x.$$

7. Raskite apibrėžimo sritį ir reikšmių aibę šių funkcijų:

a) $y=2^{|x|}$; b) $y=-2^x$; c) $y=|3^x-3|$.

Nubraižykite tų funkcijų grafikus.

3. Logaritminė funkcija. Sakykime, duotas koks nors skaičius $a>0$, $a\neq 1$. Tada funkcija

$$y=\log_a x, \quad x\in R_+, \tag{1}$$

vadinama *logaritmine funkcija.*

Remiantis apibrėžimu, logaritminė funkcija yra apibrėžta visų teigiamų realiųjų skaičių aibėje R_+. Iš skaičiaus logaritmo duotuoju pagrindu apibrėžimo išplaukia, kad logaritminė funkcija yra atvirkštinė rodiklinei. Iš tikrųjų, jeigu logaritminė funkcija $y=\log_a x$ skaičiui α priskiria skaičių β, t.y. $\beta=\log_a \alpha$, tai rodiklinė funkcija $y=a^x$ skaičiui β priskiria skaičių α, t.y. $\alpha=a^\beta$ ir atvirkščiai. Akivaizdu, kad logaritminės funkcijos reikšmių aibė yra visų realiųjų skaičių aibė R.

Iš logaritmų 3 ir 4 savybių išplaukia, kad (1) logaritminė funkcija yra didėjanti, kai $a>1$, ir mažėjanti, kai $0<a<1$.

1 teorema. *Logaritminė funkcija yra tolydi kiekviename taške* $x_0\in$ $\in R_+$.

Įrodymas. Imkime kokį nors $\varepsilon>0$ ir raskime tokį $\delta>0$, kad būtų teisinga nelygybė

$$|\log_a x-\log_a x_0|<\varepsilon, \tag{2}$$

jeigu tik x tenkina nelygybę $|x-x_0|<\delta$.

(2) nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$\log_a x_0 - \varepsilon < \log_a x < \log_a x_0 + \varepsilon. \qquad (3)$$

Nagrinėkime skaičius $x_1 = x_0 a^{-\varepsilon}$ ir $x_2 = x_0 a^{\varepsilon}$. Akivaizdu, kad δ galima imti mažiausią iš skaičių $|x_1 - x_0|$ ir $|x_2 - x_0|$. Iš tikrųjų, jeigu $a > 1$ ir $|x - x_0| < \delta$, tai $x_1 < x < x_2$ ir $\log_a x_1 < \log_a x < \log_a x_2$. Jeigu $0 < a < 1$, tai $x_1 > x > x_2$ ir $\log_a x_1 < \log_a x < \log_a x_2$. Kadangi $\log_a x_1 = \log_a x_0 - \varepsilon$, $\log_a x_2 = \log_a x_0 + \varepsilon$, tai teorema įrodyta.

2 teorema. *Jeigu* $a > 1$, *tai*

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \to +0} \log_a x = -\infty.$$

Įrodymas. Kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta = a^{\varepsilon} > 0$, kad $\log_a x > \varepsilon$, kai $x > \delta$. Analogiškai, jeigu $0 < x < \delta$ ir $\delta = a^{-\varepsilon}$, tai $\log_a x < -\varepsilon$. Teorema įrodyta.

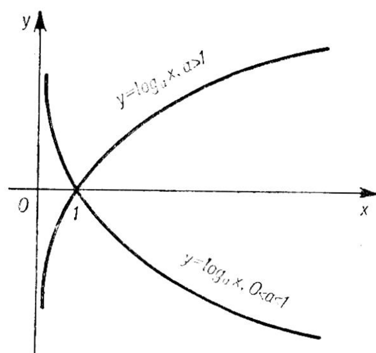
Išvada. *Jeigu* $0 < a < 1$, *tai*

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \to +0} \log_a x = +\infty.$$

Įrodymas. Remsimės logaritmo pagrindo keitimo formule:

$$\log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = -\log_{\frac{1}{a}} x.$$

Dabar išvados teiginys išplaukia iš 2 teoremos.



63 pav.

Logaritminės funkcijos grafikai pateikti 63 paveiksle. Jie vaizdžiai iliustruoja pagrindines logaritminės funkcijos savybes.

Pratimai

8. Viename brėžinyje nubraižykite funkcijų $y = \log_3 x$, $y = \log_{3,5} x$, $y = \log_5 x$ grafikus. Nurodykite, kuo jie yra panašūs ir kuo skiriasi.

9. Padarykite tą patį, kai funkcijos yra

$y=\log_{\frac{1}{3}} x$, $y=\log_{0,5} x$, $y=\log_{\frac{1}{4}} x$.

10. Raskite apibrėžimo sritį ir reikšmių aibę šių funkcijų:

a) $y=\log_2 |x|$; b) $y=\log_{0,5} |x|$; c) $y=|\log_2 x|$;

d) $y=|\log_{\frac{1}{2}} x|$; e) $y=\log_2 (-x)$; f) $y=|\log_{\frac{1}{2}} (-x)|$.

Nubraižykite tų funkcijų grafikus.

4. Rodiklinės lygtys. *Rodiklinėmis* paprastai vadinamos tokios lygtys, kuriose nežinomasis yra tik laipsnio rodiklyje. Pavyzdžiui, lygtys $2^{x+1}-7=0$, $3^x=1$ yra rodiklinės, o lygtys $2^{x+1}=x$, $x\cdot 3^x=x$ jau nėra rodiklinės.

Rodiklinių lygčių sprendimo metodus ir būdus išnagrinėsime, spręsdami konkrečius pavyzdžius.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį $4^{2x-1}=2^x$.

Sprendimas. Abi tos lygties puses logaritmuodami pagrindu 2, gausime

$$(2x-1)\log_2 4=x. \qquad (1)$$

Kadangi $\log_2 4=2$, tai

$$2(2x-1)=x. \qquad (2)$$

Iš paskutinės lygties randame: $x=\frac{2}{3}$. Ta ir tik ta x reikšmė bus duotosios lygties sprendinys, nes (2) lygtis yra ekvivalenti (1) lygčiai, o (1) lygtis yra ekvivalenti pradinei lygčiai.

Visą sprendimo procesą trumpai galima užrašyti šitaip:

$$4^{2x-1}=2^x \Leftrightarrow (2x-1)\log_2 4=x \Leftrightarrow 2(2x-1)=x \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Atsakymas: $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\frac{(0,125)^{x-0,5}}{2\sqrt{2}}=8\cdot(0,25)^{1-x}.$$

Sprendimas. Pirmiausia pastebėsime, kad

$$0,125=(0,5)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=2^{-3};$$

$$2\sqrt{2}=2^{1+\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}=2^{1,5};$$

$$0,25=(0,5)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=2^{-2}.$$

Taigi duotoji lygtis yra ekvivalenti šitokiai:

$$2^{-3(x-0,5)}=2^{1,5}\cdot 2^{3}\cdot 2^{-2(1-x)}.$$

Abi šios lygties puses logaritmuodami pagrindu 2, gausime lygtį

$$-3(x-0,5)=1,5+3-2(1-x),$$

kurios sprendiniai bus pradinės lygties sprendiniai.

Spręsdami paskutinę lygtį, gauname

$$-5x=-1,5+1,5+3-2,$$

taigi $5x=-1$.

Atsakymas: $\{-0,2\}$.

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $4^{x-1}=3^{3x}$.

Sprendimas. Abi tos lygties puses logaritmuodami pagrindu 4, gausime

$$x-1=3x\log_4 3,$$

taigi

$$x=\frac{1}{1-3\log_4 3}.$$

Visi nagrinėti pavyzdžiai buvo sprendžiami vienu metodu – *abi lygties pusės buvo logaritmuojamos tuo pačiu pagrindu.* Čia remiamės tuo, kad du teigiami skaičiai yra lygūs tada ir tik tada, kai lygūs jų logaritmai tuo pačiu pagrindu.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$2\cdot 9^{x}-3^{x+1}-2=0.$$

Sprendimas. Kadangi tą lygtį galima užrašyti šitaip:

$$2\cdot(3^{x})^{2}-3\cdot 3^{x}-2=0,$$

tai, pažymėję $y=3^x$, gausime y atžvilgiu kvadratinę lygtį

$$2y^2-3y-2=0.$$

Ją išsprendę, rasime: $y=2$ ir $y=-\frac{1}{2}$. Paskutinė lygybė yra negalima, nes $3^x>0$. Taigi $3^x=2$.

Atsakymas: $x=\log_3 2$.

Čia taikėme vadinamąjį *kintamojo keitimo metodą.* Atkreipsime dėmesį, kad, taikant šį metodą, gali atsirasti vadinamieji pašaliniai sprendiniai. 4 pavyzdyje po pakeitimo $y=3^x$ gauname y atžvilgiu kvadratinę lygtį. Akivaizdu, kad $y_1=3^{x_1}$ yra tos kvadratinės lygties sprendinys, jeigu x_1 yra pradinės lygties sprendinys. Tačiau kvadratinė lygtis turi sprendinį $\left(y=-\frac{1}{2}\right)$, kuris neatitinka nė vieno pradinės lygties sprendinio.

Kintamųjų keitimo metodu išspręsime dar vieną lygtį.

5 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$2^{x^2+1}-4^{x^2}=1.$$

Sprendimas. Pakeitę kintamąjį $y=2^{x^2}$, gausime kvadratinę lygtį

$$2y-y^2=1,$$

kuri turi tik vieną sprendinį $y=1$. Iš lygties $1=2^{x^2}$ randame: $x=0$. Tikrindami įsitikiname, kad $x=0$ tikrai yra duotosios lygties sprendinys.

Pratimas

11. Išspręskite lygtis:

a) $3^{x-5}=81$; b) $9^{\frac{x-1}{2}}=27^{x^2-1}$; c) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{1}{3}\right)^{7x-3}$;

d) $1{,}8^{x^2-5x-11}=5{,}832$; e) $21\cdot 3^x-3^{x+4}=5^{x+2}-5^{x+3}$;

f) $3^{x-\frac{1}{2}}-2^{2x}=4^{x-\frac{1}{2}}-3^{x+\frac{1}{2}}$; g) $27\cdot 3^{2(x+1)}-3^{x+2}=2$;

h) $2^{x+2+\sqrt{x^2-3}}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-3}}+8=0$; i) $2^{x+1}+2\cdot 2^{-x}=a$,

a – realusis skaičius.

5. Logaritminės lygtys. *Logaritminėmis* paprastai vadinamos tokios lygtys, kuriose nežinomasis yra tik po logaritmo ženklu (atskiru atveju logaritmo pagrinde). Pavyzdžiui, lygtys $2\log_2 x-7=0$, $\log_x 2=4$ yra logaritminės, o lygtis $\lg x-x^2=0$ jau nėra logaritminė.

Logaritminių lygčių sprendimo metodus išnagrinėsime, spręsdami konkrečius pavyzdžius.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\log_2(3x-2)=\log_{\frac{1}{2}} x.$$

Sprendimas. Remiantis logaritmo pagrindo keitimo formule,

$$\log_{\frac{1}{2}} x=\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}=\frac{\log_2 x}{-1}=-\log_2 x,$$

todėl duotoji lygtis yra ekvivalenti šitokiai:

$$\log_2(3x-2)=\log_2 x^{-1}. \quad (1)$$

Du skaičiai yra lygūs, jeigu tų skaičių logaritmai tuo pačiu pagrindu yra lygūs. Todėl koks nors x_0, tenkinantis (1) lygtį, tenkina ir lygtį

$$3x-2=x^{-1}, \quad (2)$$

t.y. lygtį

$$3x^2-2x=1.$$

Tos kvadratinės lygties sprendiniai yra $x=1$ ir $x=-\frac{1}{3}$.

Iš mūsų samprotavimų išplaukia, kad visi duotosios lygties sprendiniai priklauso aibei $\left\{1;\ -\frac{1}{3}\right\}$.

Tačiau ypač reikia atkreipti dėmesį į tai, kad ne visi tos aibės skaičiai būtinai yra ieškomieji sprendiniai. Tikrindami įsitikiname, kad duotosios lygties sprendinys yra tik $x=1$.

Atsakymas: $\{1\}$.

Simboliškai sprendimo eigą galima užrašyti šitaip:

$$\log_2(3x-2)=\log_{\frac{1}{2}} x \Leftrightarrow \log_2(3x-2)=\log_2 x^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-2=x^{-1} \Leftrightarrow 3x^2-2x=1 \Leftrightarrow (x=1) \vee \left(x=-\frac{1}{3}\right).$$

Čia, pereinant nuo (1) lygties prie (2), parašytas ženklas $\Rightarrow$, bet ne $\Leftrightarrow$, nes (2) lygties sprendinys gali ir nebūti (1) lygties sprendinys.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5.$$

Sprendimas.

$$\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5 \Leftrightarrow \lg(x-2)(x-3)=$$

$$=\lg 2 \Rightarrow (x-2)(x-3)=2 \Leftrightarrow (x=4) \vee (x=1).$$

Tikrindami įsitikiname, kad $x=4$ yra duotosios lygties sprendinys, o $x=1$ jau nėra sprendinys, nes, kai $x=1$, kairioji lygties pusė neapibrėžta (neturi prasmės).

Atsakymas: $\{4\}$.

Nurodysime dar kitą tos lygties sprendimo metodą, pagrįstą tuo, kad iš pradžių randama aibė visų reikšmių x, su kuriomis apibrėžtos (turi prasmę) abi lygties pusės. Ta aibė paprastai vadinama *lygties apibrėžimo sritimi*, arba *leistinų kintamojo reikšmių sritimi.*

Funkcija $\lg(x-2)$ yra apibrėžta tik tada, kai $x>2$, o funkcija $\lg(x-3)$ apibrėžta, kai $x>3$, todėl duotosios lygties kairioji pusė yra apibrėžta, kai $x>3$, vadinasi, visi tos lygties sprendiniai priklauso intervalui $]3;\ +\infty[$.

Iš logaritmų savybių išplaukia, kad reikšmė $x>3$ tenkina duotąją lygtį tada ir tik tada, kai ji tenkina lygtį

$$\lg(x-2)(x-3)=\lg 2.$$

Taigi $x>3$ tenkina tą lygtį tada ir tik tada, kai tenkina lygtį

$$(x-2)(x-3)=2,$$

o tą lygtį iš reikšmių $x>3$ tenkina tik $x=4$. Vadinasi, $x=4$ yra duotosios lygties sprendinys, o kitų sprendinių nėra.

Trumpai tuos samprotavimus galima užrašyti šitaip: intervale $]3;\ +\infty[$, t.y. duotosios lygties apibrėžimo srityje

$$\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5 \Leftrightarrow \lg(x-2)(x-3)=\lg 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=2 \Leftrightarrow x=4.$$

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$4^{\log_2 \lg x} = \lg x - \lg^2 x + 1.$$

Sprendimas. Dešinioji lygties pusė yra apibrėžta visiems $x>0$, o kairioji – visiems x, kurių $\lg x>0$, t.y. $x>1$. Vadinasi, duotosios lygties apibrėžimo sritis yra intervalas $]1; +\infty[$. Tame intervale, t.y. kai $x>1$,

$$4^{\log_2 \lg x} = 2^{2\log_2 \lg x} = (2^{\log_2 \lg x})^2 = (\lg x)^2.$$

Todėl intervale $]1; +\infty[$ duotoji lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$2\lg^2 x - \lg x - 1 = 0.$$

Išsprendę tą lygtį kaip kvadratinę $\lg x$ atžvilgiu, gauname du sprendinius

$$\lg x = 1 \text{ ir } \lg x = -\frac{1}{2}.$$

Antrasis sprendinys netenkina sąlygos $\lg x>0$. Vadinasi, duotoji lygtis yra ekvivalenti lygčiai $\lg x=1$ ir turi vienintelį sprendinį $x=10$.

Atsakymas: $\{10\}$.

Atkreipsime dėmesį, kad, spręsdami paskutinę lygtį, keitėme kintamąjį $y=\lg x$.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\log_{3\sqrt{x}} x + \log_{3x} \sqrt{x} = 0.$$

Sprendimas. Iš pradžių logaritmus pakeisime pagrindu 3 ir pertvarkysime gautuosius reiškinius:

$$\log_{3\sqrt{x}} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 3\sqrt{x}} = \frac{\log_3 x}{1+\frac{1}{2}\log_3 x},$$

$$\log_{3x} \sqrt{x} = \frac{\log_3 \sqrt{x}}{\log_3 3x} = \frac{\frac{1}{2}\log_3 x}{1+\log_3 x}.$$

Tos lygybės x atžvilgiu yra tapatybės. Todėl duotąją lygtį galima užrašyti šitaip:

$$\frac{\log_3 x}{1+\frac{1}{2}\log_3 x} + \frac{\frac{1}{2}\log_3 x}{1+\log_3 x} = 0.$$

Darome keitinį $y=\log_3 x$ ir sprendžiame gautąją lygtį:

$$\frac{y}{1+\frac{1}{2}y} + \frac{\frac{1}{2}y}{1+y} = 0 \Leftrightarrow \frac{y\left(1+y+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}y\right)}{\left(1+\frac{1}{2}y\right)(1+y)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y=0) \vee \left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}y=0\right).$$

Vadinasi, lygčių $\log_3 x=0$ ir $\log_3 x = -\frac{5}{6}$ sprendinių, t.y. $x=1$ ir $x=3^{-\frac{5}{6}}$, sąjunga yra visų duotosios lygties sprendinių aibė.

Atsakymas: $\left\{1;\ 3^{-\frac{5}{6}}\right\}$.

5 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\lg(1-x)-7\lg x=2\lg(x-3).$$

Sprendimas. Kairioji tos lygties pusė yra apibrėžta visiems x, tenkinantiems sąlygas $1-x>0$ ir $x>0$, t.y. visiems $x\in]0;\ 1[$, o dešinioji – visiems $x>3$. Vadinasi, ta lygtis sprendinių neturi.

6 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$x^{\log_3 x^2+\log_3^2 x-10}=\frac{1}{x^2}.$$

Sprendimas. Tiksliau kalbant, ta lygtis nėra logaritminė, bet, logaritmuodami abi puses pagrindu 3, gausime jai ekvivalenčią logaritminę lygtį

$$(2\log_3 x+\log_3^2 x-10)\log_3 x=-2\log_3 x.$$

Ta lygtis yra ekvivalenti dviem lygtims:

$$\log_3 x=0 \text{ ir } \log_3^2 x+2\log_3 x-8=0.$$

Spręsdami paskutinę lygtį $\log_3 x$ atžvilgiu, gausime $\log_3 x=-1\pm3$, t.y. $\log_3 x=2$, $\log_3 x=-4$.

Atsakymas: $\left\{1;\ 9;\ \frac{1}{81}\right\}$.

Pratimas

12. Išspręskite lygtis:

a) $\lg\frac{x-5}{x-2}=2$; b) $\log_{\frac{1}{2}}(x-\sqrt{x^2-16})=-1$;

c) $\lg(2x)+\lg(x+3)=\lg(12x-4)$; d) $\log_2(3^{2x-2}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$;

e) $(3-\lg x+\lg 3)\lg x=2\lg 3+2$; f) $\frac{1}{4}\lg(x^{2\lg x})=\lg\sqrt{x}$;

g) $\log_3 x+\log_x 3=2{,}5$; h) $9\cdot 3^{\log_x^2 4}-\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x\frac{1}{8}}=0$.

6. Rodiklinės ir logaritminės nelygybės. Rodiklinių ir logaritminių nelygybių, kaip ir atitinkamų lygčių, sprendimo metodus išnagrinėsime, spręsdami konkrečius pavyzdžius. Svarbiausi tų nelygybių sprendimo būdai yra pagrįsti atitinkamų funkcijų didėjimo ir mažėjimo savybėmis.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $3^{2x}>3^{x-2}$.

Sprendimas. Rodiklinė funkcija, kurios pagrindas didesnis už 1, didėja, todėl

$$3^{2x}>3^{x-2}\Leftrightarrow 2x>x-2\Leftrightarrow x>-2.$$

Atsakymas: $\{x\in R \mid x>-2\}$, arba trumpiau $]-2;\ +\infty[$.

2 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $3^{x-2}\cdot 2^x>2^2$.

Sprendimas.

$$3^{x-2}\cdot 2^x>2^2 \Leftrightarrow 6^x\cdot 3^{-2}>2^2 \Leftrightarrow 6^x>6^2 \Leftrightarrow x>2.$$

Atsakymas: $]2;\ +\infty[$.

3 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}>\frac{1}{16}$.

Sprendimas. Kadangi $\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$ ir rodiklinė funkcija, kurios pagrindas mažesnis už 1, mažėja, tai duotoji nelygybė yra teisinga tik su tais x, su kuriais $2x-1<4$, t.y. $x<2{,}5$.

Atsakymas: $]-\infty;\ 2{,}5[$.

4 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $2^x>3$.

Sprendimas. Logaritmuokime abi tos nelygybės puses pagrindu 2. Iš laipsnių ir logaritmų savybių išplaukia, kad

$$2^x>3 \Leftrightarrow x>\log_2 3.$$

Atsakymas: $]\log_2 3;\ +\infty[$.

5 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}<\frac{1}{4}$.

Sprendimas. Logaritmuokime abi tos nelygybės puses pagrindu $\frac{1}{2}$ ir remkimės tuo, kad rodiklinė funkcija, kurios pagrindas mažesnis už 1, mažėja. Tada

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}<\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2-2x>2.$$

Išsprendę šią kvadratinę nelygybę, gauname: $x>1+\sqrt{3}$ arba $x<1-\sqrt{3}$. Vadinasi, duotosios nelygybės sprendinių aibė yra dviejų intervalų $]1+\sqrt{3};\ +\infty[$ ir $]-\infty;\ 1-\sqrt{3}[$ sąjunga.

Atsakymas: $]-\infty;\ 1-\sqrt{3}[\ \cup\ ]1+\sqrt{3};\ +\infty[$.

6 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$\log_3(2x+1)<\log_3 5.$$

Sprendimas. Kairioji nelygybės pusė yra apibrėžta visiems x, tenkinantiems nelygybę $2x+1>0$, t.y. $x>-0{,}5$. Jeigu kuris nors x tenkina duotąją nelygybę, tai jis tenkina ir nelygybę

$$2x+1>0,$$

nes yra apibrėžtas tik teigiamų skaičių logaritmas, taip pat nelygybę

$$2x+1<5,$$

nes logaritminė funkcija, kurios pagrindas didesnis už 1, didėja.

Teisingas ir atvirkštinis tvirtinimas: jeigu x tenkina tas dvi nelygybes, tai jis tenkina ir duotąją nelygybę.

Išsprendę tą nelygybių sistemą, gauname $x > -0,5$ ir $x < 2$, t.y. $x \in$ $\in]-0,5;\ 2[$.

Sprendimo eigą simboliškai galima užrašyti šitaip:

$$\log_3(2x+1) < \log_3 5 \Leftrightarrow (2x+1>0) \wedge (2x+1<5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x > -0,5) \wedge (x < 2) \Leftrightarrow x \in]-0,5;\ 2[.$$

Atsakymas: $]-0,5;\ 2[$.

7 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$\log_{0,5}(3x+1) < \log_{0,5}(x-1).$$

Sprendimas. Kairioji nelygybės pusė yra apibrėžta, kai x tenkina nelygybę $3x+1>0$, o dešinioji apibrėžta, kai $x>1$. Remdamiesi ta pastaba ir turėdami omenyje, kad logaritminė funkcija, kurios pagrindas mažesnis už 1, mažėja, gauname, kad duotoji nelygybė yra ekvivalenti šiai nelygybių sistemai:

$$\begin{cases} 3x+1>0, \\ x>1, \\ 3x+1>x-1. \end{cases}$$

Tos sistemos sprendinys yra bet koks $x>1$, o kitų sprendinių nėra.

Atsakymas: $]1;\ +\infty[$.

8 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$\log_{1-x}(x-2) \geqslant -1.$$

Sprendimas. Kairioji nelygybės pusė yra apibrėžta visiems x, tenkinantiems sąlygas:

$$1-x>0,$$

$$x-2>0,$$

$$1-x \neq 1.$$

Akivaizdu, kad nėra nė vieno realiojo skaičiaus, tenkinančio tas sąlygas. Todėl duotoji nelygybė neturi sprendinių, t.y. jos sprendinių aibė yra tuščia.

Atsakymas: $\varnothing$.

Pratimai

13. Išspręskite nelygybes:

a) $4^x > 64$; b) $0,3^x < 3\frac{1}{3}$; c) $6^x > 13$;

d) $0,5^{x^2-4x} < 8$; e) $2^{\frac{2}{x}} + 4^{\frac{1}{x}+2} < 68$; f) $4^x < 2^{x+1} + 3$;

g) $(4^{x-1})^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{2}{3} > \frac{24}{9}$; h) $2^x + 2^{2x+2} - 3 \cdot 2^{2x+1} > -3$.

14. Išspręskite nelygybes:

a) $\log^2_{\frac{1}{2}} x > 25$; b) $\log_x (x^2+1) > 2$;

c) $\log_{0,25} (x-1) + \log_{0,25} (x+1) > \log_{0,25} 3$; d) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$;

e) $2 + \log_2 \sqrt{x+1} > 1 - \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4-x^2}$;

f) $\log_{\frac{1}{2}} (x+8) - \log_{\frac{1}{2}} (x-3) > \log_{\frac{1}{2}} 3x$;

g) $\frac{\lg (35-x^3)}{\lg (5-x)} > 3$; h) $\sqrt{\log_x \sqrt{3x} \cdot \log_3 x} > -1$;

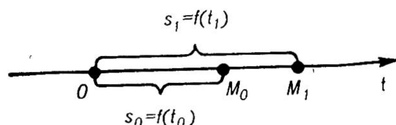
i) $15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 (9x)+1} > 1$.

IV SKYRIUS

Išvestinė ir jos pritaikymai

§ 15. IŠVESTINĖ

1. Uždaviniai, iliustruojantys išvestinės sąvoką. Nagrinėsime paprastus fizikos reiškinius: tiesiaeigį materialaus taško judėjimą ir srovės tekėjimą elektros grandine. Jiems apibūdinti yra įvedamos atitinkamos charakteristikos: judėjimo greitis ir srovės stiprumas. Paanalizuosime kiekvieną šių reiškinių ir su juo susijusias sąvokas.



64 pav.

1) Tiesiaeigis materialaus taško judėjimas (momentinio greičio uždavinys). Sakykime, materialus taškas M juda tiese. Toje tiesėje pasirinkime vieną kryptį, atskaitos pradžią (tašką O) ir mastelio vienetą (64 pav.). Kiekvieną laiko momentą t atitinka kelio tarpas (poslinkis) S, kurį taškas M nuėjo nuo atskaitos taško O per laiką t, taigi kelias yra laiko funkcija. Tad egzistuoja funkcija f, kurios reikšmės yra taško poslinkis per laiką t:

$$s=f(t), \quad t\in[0;\ T]. \tag{1}$$

Jeigu funkcija f yra žinoma, tai galima nustatyti taško M padėtį bet kuriuo laiko momentu. Todėl judėjimas yra laikomas apibrėžtu, jeigu yra žinoma f. Ši funkcija vadinama *taško M judėjimo dėsniu*, o lygybė $s=f(t)$ – *judėjimo lygtimi.*

Iš visų materialaus taško judėjimų paprasčiausias yra tolygus judėjimas tiese. Iš fizikos kurso žinoma, kad tiesiaeigis taško judėjimas yra vadinamas *tolygiu*, jeigu taško poslinkiai per bet kuriuos lygius laiko tarpus yra lygūs. Tiesiaeigio tolygaus judėjimo *greičiu* yra vadinamas taško poslinkio ir laiko tarpo t, per kurį tas poslinkis įvyko, santykis. Taigi greitis rodo, kiek taškas paslenka per laiko vienetą. Iš to išplaukia, kad tolygaus judėjimo greitis yra pastovus. Praktikoje tolygiai ir tiesiai juda traukiniai, automobiliai, garlaiviai, lėktuvai, raketos ir kosminiai laivai tik kai

kuriose kelio atkarpose, bet apskritai jų judėjimas yra netolygus. Pavyzdžiui, startavusi iš kosmodromo raketa iš pradžių „įsibėgėja", t.y. per antrąją savo judėjimo minutę ji nuskrieja didesnį atstumą, negu per pirmąją, per trečiąją minutę – dar didesnį atstumą, negu per antrąją, ir t.t. Pasiekusi tam tikrą greitį, raketa skrenda tolygiai, t.y. per bet kuriuos lygius laiko tarpus nuskrenda lygius atstumus, o dar vėliau jos judėjimas lėtėja. Tą patį galima pasakyti ir apie traukinio, automobilio, garlaivio, lėktuvo ir t.t. judėjimą.

Pabrėšime, kad netolygiai judantis taškas per lygius laiko tarpus tarp skirtingų laiko momentų gali paslinkti nevienodai. Vadinasi, netolygaus judėjimo negalima pilnutinai apibūdinti, nurodžius taško poslinkį per tą ar kitą laiko tarpą, kaip kad daroma tolygaus judėjimo atveju. Todėl taško netolygiam judėjimui apibūdinti yra vartojama *vidutinio greičio* per kurį nors laikotarpį sąvoka.

Sakykime, materialus taškas juda pagal dėsnį $s=f(t)$, $t \in [0;\ T]$. Jeigu $s_0=f(t_0)$ ir $s_1=f(t_1)$, tai *vidutiniu judėjimo greičiu* per laikotarpį nuo momento t_0 iki momento t_1 yra vadinamas santykis

$$v_{\text{vid}}=v_{\text{vid}}(t_0;\ t_1)=\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}=\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}. \qquad (2)$$

Pavyzdys. Iš fizikos kurso žinoma, kad kūnai laisvai krinta pagal dėsnį $s(t)=\frac{gt^2}{2}$; čia g – laisvojo kritimo pagreitis ($g \approx 9{,}8$ m/s^2), t – laikas (sekundėmis), s – poslinkis (metrais).

Apskaičiuosime kūno poslinkį per pirmąją sekundę, t.y. per laikotarpį nuo momento $t_0=0$ s iki momento $t_1=1$ s:

$$s(1)-s(0)=\left(\frac{g\cdot 1}{2}-\frac{g\cdot 0}{2}\right)\approx 4{,}9 \text{ m}.$$

Taigi vidutinis kūno judėjimo greitis per pirmąją sekundę yra

$$v_{\text{vid}}(0;\ 1)=\frac{s(1)-s(0)}{1-0}\approx 4{,}9 \text{ m/s}.$$

Dabar apskaičiuosime kūno poslinkį per dešimtąją sekundę, t.y. per laikotarpį nuo momento $t_0=9$ s iki momento $t_1=10$ s:

$$s(10)-s(9)=\left(\frac{g\cdot 10^2}{2}-\frac{g\cdot 9^2}{2}\right)\approx 93{,}1 \text{ m}.$$

Taigi vidutinis kūno judėjimo greitis per dešimtąją sekundę yra

$$v_{\text{vid}}(9;\ 10)=\frac{s(10)-s(9)}{10-9}\approx 93{,}1 \text{ m}.$$

Vadinasi, laisvas kūnų kritimas yra netolygus judėjimas, nes per lygius laiko tarpus tarp skirtingų laiko momentų kūnas nukrinta skirtingus atstumus. Atkreipsime dėmesį, kad laisvai krintančio kūno vidutiniai grei-

čiai per lygius, bet skirtingus laiko tarpus (pavyzdžiui, nuo $t_0=0$ s iki $t_1=1$ s ir nuo $t_0=9$ s iki $t_1=10$ s) yra nelygūs.

Remdamiesi (2) formule, rasime vidutinį laisvai krintančio kūno greitį per laikotarpį nuo kritimo pradžios, t.y. nuo $t_0=0$ s, iki momento $t_1=10$ s:

$$v_{\text{vid}}(0;\ 10)=\frac{s(10)-s(0)}{10-0}=\left(\frac{g\cdot 10^2}{2}-\frac{g\cdot 0^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{10}\approx 49\ \text{m/s}.$$

Palyginę vidutinius greičius $v_{\text{vid}}(0;\ 10)\approx 49$ m/s, $v_{\text{vid}}(0;\ 1)=4{,}9$ m/s ir $v_{\text{vid}}(9;\ 10)\approx 93{,}1$ m/s, matome, kad vidutinis greitis per visą laikotarpį nuo $t_0=0$ s iki $t_1=10$ s skiriasi nuo vidutinių greičių per pirmąją ir paskutinę laikotarpio sekundę. Vadinasi, jeigu taškas juda netolygiai, tai, žinant vidutinį greitį per kurį nors laikotarpį, negalima rasti greičio kuriuo nors laiko momentu (to laikotarpio). Tai reiškia, kad netolygaus judėjimo vidutinis greitis pilnutinai jo neapibūdina, todėl labai svarbu yra žinoti greitį kiekvienu laiko momentu, t.y. vadinamąjį *momentinį greitį*. Išaiškinsime, kaip reikia suprasti sąvoką „greitis kiekvienu laiko momentu t_0“. Sakykime, taškas juda pagal dėsnį $s=f(t)$, $t\in[0;\ T]$. Tada iki laiko momento t_0 jis nueina kelią $s_0=f(t_0)$, o iki bet kokio kito laiko momento t – kelią $s=f(t)$. Taigi per laiko tarpą $t-t_0$ nuo momento t_0 iki momento t taškas nueina kelią, lygų $s-s_0=f(t)-f(t_0)$, judėdamas vidutiniu greičiu

$$v_{\text{vid}}(t_0;\ t)=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

Aišku, vidutinis greitis tuo geriau apibūdina judėjimą, kuo trumpesnis laikotarpis $t-t_0$. Todėl natūralu teigti, kad kuo trumpesnis laiko tarpas tarp momentų t_0 ir t, tuo vidutinis greitis per tą tarpą yra artimesnis greičiui laiko momentu t_0. Vadinasi, galima sakyti, kad vidutinis greitis v_{vid} artėja prie greičio $v(t_0)$ laiko momentu t_0, kai $t-t_0$ artėja prie nulio, kitaip tariant, kai t artėja prie t_0. Taigi *momentiniu greičiu $v(t_0)$ laiko momentu t_0* yra vadinama riba (jeigu ji egzistuoja), prie kurios artėja vidutinis greitis per laikotarpį nuo t_0 iki t, kai t artėja prie t_0, t.y.

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0} v_{\text{vid}}(t_0;\ t)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}. \qquad (3)$$

1 pavyzdys. Vėl nagrinėsime laisvą kūno kritimą pagal dėsnį $s(t)=\frac{gt^2}{2}$. Remdamiesi (3) formule, rasime momentinį greitį laiko momentu t_0.

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\frac{gt^2}{2}-\frac{gt_0^2}{2}}{t-t_0}=\frac{g}{2}\lim_{t\to t_0}\frac{t^2-t_0^2}{t-t_0}=\frac{g}{2}\lim_{t\to t_0}(t+t_0)=gt_0.$$

Taigi laisvai krintančio kūno greitis $v(t)=gt$.

2 pavyzdys. Įjungtas liftas juda pagal dėsnį

$$s(t)=1{,}5\,t^2+2t+12;$$

čia s – poslinkis (metrais), t – laikas (sekundėmis). Remdamiesi (3) formule, rasime momentinį greitį laiko momentu t_0

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{(1{,}5t^2+2t+12)-(1{,}5t_0^2+2t_0+12)}{t-t_0}=$$

$$=\lim_{t\to t_0}\frac{1{,}5(t^2-t_0^2)+2(t-t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}[1{,}5(t+t_0)+2]=3t_0+2.$$

Vadinasi, įjungtas liftas juda greičiu $v(t)=3t+2$.

2) Srovės tekėjimas elektros grandine (momentinio srovės stiprumo uždavinys). Imkime elektros grandinę su srovės šaltiniu. Pažymėkime $q=q(t)$ elektros krūvį (kulonais), pratekantį pro laidininko skerspjūvį per laiką t. Elektros krūvis yra laiko funkcija, nes kiekvieną laiko t reikšmę atitinka tam tikra krūvio reikšmė. Norėdami apibūdinti, kokiu greičiu kinta laikui bėgant elektros krūvis, fizikai vartoja srovės stiprumo sąvoką.

Sakykime, $q(t_1)-q(t_0)$ yra elektros krūvis, pratekantis pro nurodytą pjūvį per laikotarpį nuo momento t_0 iki t. Tada *vidutiniu srovės stiprumu* I_{vid} per tą laikotarpį yra vadinamas santykis

$$I_{\text{vid}}=I_{\text{vid}}(t_0;\ t_1)=\frac{q(t_1)-q(t_0)}{t_1-t_0}.$$

Jeigu srovė yra pastovi, tai vidutinis srovės stiprumas I_{vid} yra vienodas, Jmant bet kuriuos vienodos trukmės laikotarpius. Jeigu grandine teka kintamoji srovė, tai I_{vid} gali būti skirtingas vienodos trukmės laikotarpiais tarp skirtingų laiko momentų. Todėl kintamajai srovei apibūdinti yra įvedama momentinio srovės stiprumo (srovės stiprumo konkrečiu laiko momentu) sąvoka: *momentiniu srovės stiprumu $I(t_0)$ laiko momentu t_0* yra vadinama riba (jeigu ji egzistuoja), prie kurios artėja vidutinis srovės stiprumas per laikotarpį nuo t_0 iki t, kai t artėja prie t_0, t.y.

$$I=\lim_{t\to t_0}I_{\text{vid}}(t_0;\ t)=\lim_{t\to t_0}\frac{q(t)-q(t_0)}{t-t_0}.$$

Pratimai

1. Lėktuvas TУ-104 nuskrenda 2736 km kelią nuo Maskvos iki Taškento per 3,8 h. Raskite vidutinį jo greitį.

2. Greitasis traukinys 3200 km atstumą tarp Maskvos ir Novosibirsko nuvažiuoja per 64 h. Raskite vidutinį jo greitį.

3. Taškas juda tiese pagal dėsnį

$$s(t)\,v_0t+\frac{at^2}{2}$$

(čia ir visur toliau: s – poslinkis metrais, t – laikas sekundėmis). Raskite momentinį to taško greitį:

a) pradiniu laiko momentu $t=0$;

b) laiko momentu t_0.

4. Taškas juda tiese pagal dėsnį

$$s(t)=3t^2-2t+3.$$

Raskite momentinį to taško greitį:
a) pradiniu laiko momentu $t=0$;
b) praėjus 5 s nuo judėjimo pradžios;
c) laiko momentu $t=2$ s.
5. Raskite momentinį kūno greitį laiko momentu t_0, kai tas kūnas juda pagal dėsnį:

$$\text{a) } s(t)=2\sqrt{t}; \quad \text{b) } s(t)=\frac{1}{3+t}; \quad \text{c) } s(t)=t^3+\sqrt{t}.$$

2. Funkcijos kitimo greitis (pagrindinis uždavinys, iš kurio išplaukia išvestinės sąvoka). Funkcijos išvestinė. Ką tik išnagrinėtuose uždaviniuose buvo kalbama apie momentinį judėjimo greitį ir momentinį srovės stiprumą. Tos sąvokos buvo įvestos, remiantis tam tikra riba. Galima pateikti nemažai uždavinių, kuriuos sprendžiant būtina rasti kokios nors funkcijos kitimo greitį: pavyzdžiui, ieškant nevienalyčio strypo linijinio tankio, kaitinamo kūno šiluminės talpos, besisukančio kūno kampinio greičio ir t.t.

Gausybėje uždavinių, kuriuos sprendžiant tenka ieškoti kokios nors funkcijos kitimo greičio, būtina skaičiuoti ribą

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Pagvildensime tą klausimą smulkiau.

Imkime funkciją $y=f(x)$, $x\in]a;b[$. Sakykime, x_0 yra bet kuris fiksuotas intervalo $]a;b[$ taškas, t.y. $a<x_0<b$. Analogiškai, kalbant apie judančio kūno vidutinį ir momentinį greitį, santykis $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ vadinamas *vidutiniu funkcijos kitimo greičiu* atkarpoje, kurios galai x_0 ir x, o vidutinio greičio riba (jeigu ji egzistuoja), kai $x\to x_0$, t.y.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

yra vadinama *funkcijos kitimo greičiu taške* x_0 arba *greičio funkcijos išvestine* tame taške. Vadinasi, *funkcijos* $y=f(x)$, $x\in]a;b[$ *išvestine taške* $x_0\in]a;b[$ yra vadinamas funkcijos f kitimo taške x_0 greitis.

Apibrėžimas. Sakykime, duota funkcija $f(x)$, apibrėžta intervale $]a;b[$, ir x_0 – koks nors intervalo $]a;b[$ taškas. Riba

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

jeigu ji egzistuoja, yra vadinama *funkcijos* $f(x)$ *išvestine taške* x_0 ir žymima $f'(x_0)$.

Taigi, remiantis apibrėžimu,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{1}$$

Iš ribos apibrėžimo (žr. § 12) išplaukia, kad (1) lygybę galima užrašyti ir šitaip:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\alpha(x);$$

čia $\alpha(x)\to 0$, kai $x\to x_0$.

Taigi

$$f(x)-f(x_0)=[f'(x_0)+\alpha(x)](x-x_0), \tag{2}$$

o $\alpha(x)\to 0$, kai $x\to x_0$, arba

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0), \tag{3}$$

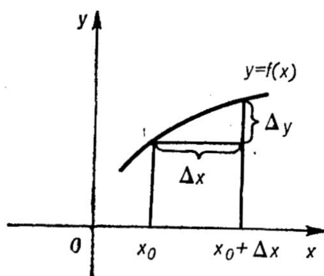
o $\alpha(x)\to 0$, kai $x\to x_0$.

(3) formulė yra labai svarbi tiek matematinės analizės kurse, tiek ir daugelyje kitų gamtos mokslų.

Kaip žinoma, duotosios funkcijos $y=f(x)$, $x\in]a;\ b[$, kintamasis x yra vadinamas *funkcijos argumentu* (arba *nepriklausomu kintamuoju*), o kintamasis y – *funkcija* (arba *priklausomu kintamuoju*). Sakykime, x_0 ir x yra dvi argumento reikšmės iš duotosios funkcijos apibrėžimo srities; tada skirtumas $x-x_0$ yra vadinamas *argumento pokyčiu* ir žymimas Δx (skaitoma „delta iks"). Taigi $\Delta x=x-x_0$, arba $x=x_0+\Delta x$. Tuo atveju sakoma, kad argumento reikšmė x_0 „pakito Δx". Funkcijos f reikšmių taškuose $x_0+\Delta x$ ir x_0 skirtumas yra vadinamas *funkcijos f pokyčiu taške* x_0 ir žymimas $\Delta f(x_0)$ (skaitoma „delta ef taške x_0"). Taigi

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Kartais trumpumo dėlei vietoj simbolio $\Delta f(x_0)$ vartojami Δf ir Δy (65 pav.).



65 pav.

Remiantis argumento ir funkcijos pokyčių sąvokomis, išvestinės apibrėžimas formuluojamas šitaip: *funkcijos $f(x)$ išvestine taške x_0* yra vadinama funkcijos taške x_0 pokyčio $\Delta f(x_0)$ santykio su argumento pokyčiu Δx riba, kai argumento pokytis artėja prie nulio (jeigu ta riba egzistuoja).

Funkcijos $y=f(x)$, $x\in]a;\ b[$, išvestinė taške x yra žymima $f'(x)$ arba y' (skaitoma „ef štrich taške iks" arba „ygrek štrich"). Taigi

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Dažnai išvestinė yra žymima simboliu $\frac{df}{dx}$ (skaitoma „dė ef pagal dė iks").

Funkcijos išvestinės radimo operacija yra vadinama *diferencijavimu.* To pavadinimo kilmė pirmiausia yra susijusi su skirtumais, kurių santykio ribos ieškome, o skirtumas lotyniškai vadinamas differentia. Funkcija $f(x)$, $x \in]a; b[$, kiekviename intervalo $]a; b[$ taške turinti išvestinę, yra vadinama *diferencijuojama tame intervale.*

Grįžtant prie 1 skirsnyje nagrinėtų uždavinių, galima pasakyti, kad

a) momentinis judėjimo greitis $v(t)$ laiko momentu t yra kelio išvestinė laiko atžvilgiu, t.y.

$$v(t)=\frac{ds(t)}{dt}=s'(t);$$

b) momentinis srovės stiprumas $I(t)$ laiko momentu t yra elektros kiekio $q(t)$ išvestinė laiko atžvilgiu, t.y.

$$I(t)=\frac{dq}{dt}=q'(t).$$

3. Išvestinės radimas, remiantis jos apibrėžimu. Remdamiesi išvestinės apibrėžimu, suformuluosime funkcijos išvestinės taške radimo taisyklę.

Norint rasti funkcijos $f(x)$ išvestinę taške x_0, reikia:

1) rasti skirtumą $f(x)-f(x_0)$;

2) rasti santykį $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

3) rasti to santykio ribą, kai $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

Tą taisyklę paaiškinsime pavyzdžiais.

1 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=c$, $x \in R$; čia c – kokia nors konstanta. Reikia rasti $f'(x)$.

Sprendimas. 1. Randame skirtumą

$$f(x)-f(x_0)=c-c=0.$$

2. Randame santykį

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{0}{x-x_0}=0.$$

3. Randame ribą

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0,$$

taigi $f'(x)=c'=0$.

Vadinasi, *pastovios funkcijos išvestinė lygi* 0.

2 pavyzdys. Reikia rasti tiesinės funkcijos $f(x)=kx+b$ išvestinę.

Sprendimas. 1. Randame skirtumą

$$f(x)-f(x_0)=[kx+b]-[kx_0+b]=k(x-x_0).$$

2. Randame santykį

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{k(x-x_0)}{x-x_0}=k.$$

3. To santykio riba su bet kokiu x_0 lygi k.
Taigi $f'(x_0)=(kx_0+b)'=k$.
3 pavyzdys. Duota $f(x)=x^3$, $x \in R$. Rasime $f'(x)$.
Sprendimas. 1. Randame skirtumą

$$f(x)-f(x_0)=x^3-x_0^3=(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2).$$

2. Randame santykį

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0}=x^2+xx_0+x_0^2.$$

3. Randame ribą

$$\lim_{x \to x_0}(x^2+xx_0+x_0^2)=3x_0^2.$$

Vadinasi,

$$f'(x_0)=3x_0^2.$$

Kadangi funkcija $f(x)=x^3$ turi išvestinę kiekviename taške $x=x_0 \in R$, tai rašome $(x^3)'=3x^2$.

Pratimas

6. Raskite šių funkcijų išvestines taškuose $x=x_0$, $x=1$, $x=5$:

a) $f(x)=x^2$; b) $f(x)=2x^2+1$; c) $f(x)=(x+3)^2$;

d) $f(x)=x^3+2x+1$; e) $f(x)=\sqrt{x}$;

f) $f(x)=1-x^3$; g) $f(x)=\sqrt{x}-x^2$.

4. Diferencijuojamos funkcijos tolydumas. Nustatysime būtiną išvestinės egzistavimo sąlygą.

Teorema. *Jeigu funkcija $f(x)$ taške x_0 turi išvestinę, tai tame taške ji yra tolydi.*

Įrodymas. Remiantis teoremos sąlyga, funkcija f taške x_0 yra diferencijuojama. Kaip žinoma, diferencijuojamai taške funkcijai yra teisinga formulė (žr. 2 skirsnį, (3) formulę):

$$f(x)=f(x_0)+[f'(x_0)+\alpha(x)](x-x_0), \tag{1}$$

kur $\alpha(x) \to 0$, kai $x \to x_0$. (1) lygybėje perėję prie ribos, kai $x \to x_0$, gausime

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0);$$

tai ir reiškia, kad funkcija f yra tolydi taške x_0. Teorema įrodyta.

Pastaba. Iš įrodytosios teoremos išplaukia: jeigu funkcija kuriame nors taške nėra tolydi, tai tame taške ji neturi išvestinės. Vėliau bus įrodyta, jog funkcijos tolydumo taške neužtenka, kad tame taške ji būtų diferencijuojama (žr. 5 skirsnį), t. y. iš funkcijos tolydumo taške neišplaukia jos diferencijuojamumas tame taške.

5. Dešinioji ir kairioji funkcijos išvestinės. Dešinioji ir kairioji funkcijos išvestinės yra apibrėžiamos, remiantis vienpusėmis ribomis.

Apibrėžimas. Sakykime, duota funkcija $f(x)$, $x \in [a; b[$, ir kuris nors intervalo $[a; b[$ taškas x_0. Dešinioji riba

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

jeigu ji egzistuoja, yra vadinama *dešiniąja funkcijos* $f(x)$ *išvestine taške* x_0 ir žymima $f'_+(x_0)$.

Apibrėžimas. Sakykime, duota funkcija $f(x)$, $x \in]a; b]$, ir kuris nors intervalo $]a; b]$ taškas x_0. Kairioji riba

$$\lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

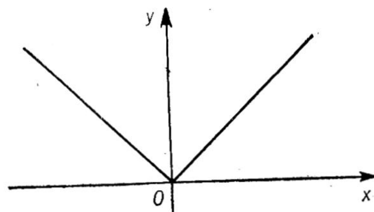
jeigu ji egzistuoja, yra vadinama *kairiąja funkcijos* $f(x)$ *išvestine taške* x_0 ir žymima $f'_-(x_0)$.

Iš vienpusių ribų teoremos (žr. § 12, 2 skirsnį) išplaukia būtina ir pakankama funkcijos išvestinės taške egzistavimo sąlyga: funkcija f, apibrėžta kokioje nors taško x_0 aplinkoje, tame taške turi išvestinę tada ir tik tada, kai egzistuoja ir yra lygios išvestinės $f'_-(x_0)$ ir $f'_+(x_0)$. Tuo atveju

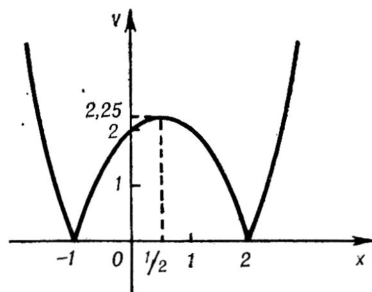
$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0).$$

Jeigu funkcija $f(x)$, $x \in [a; b]$, kiekviename atkarpos $[a; b]$ taške turi išvestinę (išvestinė taške a suprantama kaip dešinioji išvestinė, o išvestinė taške b – kaip kairioji išvestinė), tai sakoma, kad funkcija f turi išvestinę atkarpoje $[a; b]$.

1 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=|x|$ išvestinę (66 pav.).



66 pav.



67 pav.

Sprendimas. Kadangi $f(x)=x$, kai $x>0$, ir $f(x)=-x$, kai $x<0$, tai, remdamiesi tiesinės funkcijos išvestine, gauname:

$$f'(x)=(|x|)'=\begin{cases} 1, & \text{kai } x>0, \\ -1, & \text{kai } x<0. \end{cases}$$

Įrodysime, kad funkcija $f(x)=|x|$ taške $x=0$ išvestinės neturi.

Jeigu $x \leqslant 0$, tai $f(x) = |x| = -x$. Todėl, remiantis kairiosios išvestinės apibrėžimu,

$$f'_-(0) = \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to -0} \frac{-x}{x} = -1,$$

t.y. $f'_-(0) = -1$.

Jeigu $x \geqslant 0$, tai $f(x) = |x| = x$. Todėl, remiantis dešiniosios išvestinės apibrėžimu,

$$f'_+(0) = \lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = 1,$$

t.y. $f'_+(0) = 1$. Taigi $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. Vadinasi, funkcija $f(x) = |x|$ neturi išvestinės taške $x = 0$.

2 pavyzdys. Raskime išvestinę funkcijos (67 pav.)

$$f(x) = |x^2 - x - 2|.$$

Sprendimas. a) Sakykime, $x \in]-\infty; -1[$; tada $f(x) = x^2 - x - 2$. Remdamiesi išvestinės apibrėžimu, rasime $f'(x_0)$ kiekviename taške $x_0 \in]-\infty; -1[$. Kadangi

$$f(x) - f(x_0) = [x^2 - x - 2] - [x_0^2 - x_0 - 2] = (x^2 - x_0^2) - (x - x_0) =$$

$$= (x - x_0)(x + x_0 - 1),$$

tai

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} [x + x_0 - 1] = 2x_0 - 1.$$

Todėl $f'(x_0) = 2x_0 - 1$, kai $x_0 \in]-\infty; -1[$.

Analogiškai nustatoma, kad $f'(x_0) = 2x_0 - 1$, kai $x_0 \in]2; +\infty[$. Taigi $f'(x) = 2x - 1$ kiekvienam $x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.

b) Sakykime, $x \in]-1; 2[$, tada $f(x) = -x^2 + x + 2$.

Kaip ir pirmu atveju, randame $f'(x) = -2x + 1$, kai $x \in]-1; 2[$.

c) Įrodysime, kad duotoji funkcija $f(x)$ taškuose $x = -1$ ir $x = 2$ išvestinės neturi.

Jeigu $x \geqslant -1$, tai $f(x) = -x^2 + x + 2$, todėl

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1+0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1+0} \frac{-x^2 + x + 2}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to -1+0} \frac{(x+1)(2-x)}{x+1} = 3.$$

Jeigu $x \leqslant -1$, tai $f(x) = x^2 - x - 2$, todėl

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1-0} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to -1-0} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = -3.$$

Taigi $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$, todėl funkcija $f(x)=|x^2-x-2|$ taške $x=-1$ išvestinės neturi. Analogiškai skaičiuodami, lengvai rastume, kad $f'_+(2)=3$, $f'_-(2)=-3$, t.y. $f'_+(2) \neq f'_-(2)$. Iš paskutiniosios nelygybės išplaukia, kad duotoji funkcija taške $x=2$ išvestinės neturi.

Pastaba. Iš nagrinėtųjų pavyzdžių išplaukia, kad tolydi taške funkcija gali būti tame taške ir nediferencijuojama: funkcija $f(x)=|x|$ yra tolydi taške $x=0$, bet išvestinės tame taške neturi; funkcija $y=|x^2-x-2|$ yra tolydi taškuose $x=-1$ ir $x=2$, bet išvestinių tuose taškuose neturi.

Pratimas

7. Raskite išvestines funkcijų:

a) $f(x)=|x+1|$; b) $f(x)=|2-x|$;

c) $f(x)=|x^2-5x+6|$; d) $f(x)=|x^2+8x+12|$.

§ 16. ALGEBRINĖS SUMOS, SANDAUGOS IR DALMENS IŠVESTINĖ

1. Algebrinės funkcijų sumos išvestinė.

Teorema. *Jeigu funkcijos $u(x)$, $v(x)$, $x \in]a; b[$, kiekviename intervalo $]a; b[$ taške turi išvestines, tai*

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$

arba trumpiau $[u \pm v]' = u' \pm v'$.

Įrodymas. Funkcijų sumą $u(x)+v(x)$, kuri yra nauja funkcija, pažymėsime $f(x)$, $x \in]a; b[$. Ieškosime funkcijos $f(x)$, $x \in]a; b[$, išvestinės, remdamiesi apibrėžimu.

Sakykime, x_0 yra kuris nors intervalo $]a; b[$ taškas. Tada

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{[u(x)+v(x)]-[u(x_0)+v(x_0)]}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0} = u'(x_0)+v'(x_0).$$

Taigi $f'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0)$. Kadangi x_0 yra bet kuris intervalo $]a; b[$ taškas, tai

$$f'(x) = [u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x).$$

Funkcijų skirtumas yra nagrinėjamas analogiškai. Teorema įrodyta.

Pavyzdžiai

a) $(x^2+x+5)' = (x^2)' + (x+5)' = 2x+1$;

b) $(x^3+\sqrt{x})' = (x^3)' + (\sqrt{x})' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

c) $(x^2+4x+15)' = (x^2)' + (4x+15)' = 2x+4$.

Pastaba. Matematinės indukcijos metodu (1) formulę galima įrodyti ir tuo atveju, kai dėmenų skaičius yra baigtinis:

$$(u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_k(x))'=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_k'(x).$$

Pratimas

1. Remdamiesi 15 paragrafo 3 skirsnio, 16 paragrafo 1 skirsnio pavyzdžiais ir 15 paragrafo 6 pratimu, raskite šių funkcijų išvestines:

a) $f(x)=x+1$; b) $g(x)=x^2+x+1$; c) $h(x)=\sqrt{x}+x^2+3$;

d) $v(x)=x^3+\sqrt{x}$; e) $y(x)=x^3+x^2+\sqrt{x}+4$;

f) $u(x)=1+4x+x^3$; g) $w(x)=3x+41+x^2+x^3$.

2. Funkcijų sandaugos išvestinė.

Teorema. *Jeigu funkcijos* $u(x)$, $v(x)$, $x\in]a;\,b[$, *kiekviename intervalo* $]a;\,b[$ *taške turi išvestines, tai*

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x), \qquad (1)$$

arba trumpiau $[u\cdot v]'=u'\cdot v+u\cdot v'$.

Įrodymas. Sandaugą $u(x)\cdot v(x)$ pažymėsime $f(x)$, $x\in]a;\,b[$ ir rasime jos išvestinę, remdamiesi apibrėžimu.

Sakykime, x_0 yra kuris nors intervalo $]a;\,b[$ taškas. Tada

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\,v(x)-u(x_0)\,v(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\,v(x)-u(x_0)\,v(x)+u(x_0)\,v(x)-u(x_0)\,v(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)\,[u(x)-u(x_0)]}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{u(x_0)\,[v(x)-v(x_0)]}{x-x_0}=$$

$$=v(x_0)\,u'(x_0)+u(x_0)\,v'(x_0).$$

Taigi $f'(x_0)=u'(x_0)\cdot v(x_0)+v'(x_0)\cdot u(x_0)$. Kadangi x_0 yra bet kuris intervalo $]a;\,b[$ taškas, tai

$$f'(x)=[u(x)\,v(x)]'=u'(x)\,v(x)+v'(x)\,u(x).$$

Teorema įrodyta.

Pavyzdžiai

a) $[(x+5)(x-8)]'=(x+5)'(x-8)+(x-8)'(x+5)=$
$=1\cdot(x-8)+1\cdot(x+5)=2x-3$;

b) $[x^2(2x-7)]'=(x^2)'(2x-7)+x^2(2x-7)'=$
$=2x(2x-7)+x^2\cdot 2=6x^2-14x$;

c) $[\sqrt{x}(5-3x)]'=(\sqrt{x})'(5-3x)+\sqrt{x}(5-3x)'=$
$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-3x)+\sqrt{x}(-3)=\frac{5-3x-6x}{2\sqrt{x}}=\frac{5-9x}{2\sqrt{x}}$.

Išvada. *Pastovų daugiklį galima iškelti prieš išvestinės ženklą:* $(af(x))' = af'(x)$.

Įrodymas. Sandaugos išvestinės teoremą pritaikę sandaugai $af(x)$, kur a yra skaičius, gausime

$$(af(x))' = (a)'f(x) + af'(x) = 0 \cdot f(x) + af'(x) = af'(x).$$

Pavyzdžiai

a) $\left(\frac{x^2}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^2)' = \frac{2}{3}x;$

b) $\left(\frac{x^3}{3} + 5x\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (5x)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 5(x)' = x^2 + 5.$

Pratimai

2. Remdamiesi 15 paragrafo 3 skirsnio, 16 paragrafo 1 skirsnio pavyzdžiais ir 15 paragrafo 6 pratimu, raskite išvestines šių funkcijų:

a) $f(x) = -8x;$ b) $f(x) = \frac{3}{5}x;$ c) $f(x) = -\frac{4}{9}x;$

d) $f(x) = 3x + \sqrt{x} - 3x^2;$ e) $f(x) = 1 - 5x - 3x^3 + 4\sqrt{x};$

f) $f(x) = (x-9)(x+1);$ g) $f(x) = x^3(x - \sqrt{x});$

h) $f(x) = \frac{x}{3}\left(x^2 - \frac{4}{7}\sqrt{x}\right);$ i) $f(x) = (x^2 - 3x - 1)(1 - 4x - 3x^3).$

3. Įrodykite, kad dviejų funkcijų skirtumo išvestinė yra lygi jų išvestinių skirtumui (jeigu tos išvestinės egzistuoja).

4. Įrodykite trijų diferencijuojamų funkcijų sandaugos išvestinės formulę:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

3. Dviejų funkcijų dalmens išvestinė.

Teorema. *Jeigu funkcijos* $u(x)$, $v(x)$, $x \in]a; b]$, *turi išvestines visuose intervalo* $]a; b[$ *taškuose ir* $v(x) \neq 0$ *kiekvienam* $x \in]a; b[$, *tai*

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

arba trumpiau $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$

Įrodymas. Dalmenį $\frac{u}{v}$ pažymėsime f ir rasime $f'(x)$, remdamiesi išvestinės apibrėžimu.

Sakykime, x_0 yra kuris nors intervalo $]a;\ b[$ taškas. Tada

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{u(x)}{v(x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)\,v(x_0)-u(x_0)\,v(x)}{v(x)\,v(x_0)\,(x-x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{v(x)\,v(x_0)}\;\frac{u(x)\,v(x_0)-v(x)\,u(x_0)+u(x)\,v(x)-u(x)\,v(x)}{x-x_0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{v(x)\,v(x_0)}\left[\frac{v(x)\,[u(x)-u(x_0)]}{x-x_0}-\frac{u(x)\,[v(x)-v(x_0)]}{x-x_0}\right]=$$

$$=\frac{v(x_0)\,u'(x_0)-u(x_0)\,v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Kadangi x_0 yra bet kuris intervalo $]a;\ b[$ taškas, tai paskutinėje formulėje x_0 galima pakeisti x. Taigi galutinai gauname

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{v(x)\,u'(x)-u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}.$$

Pavyzdžiai

a) $$\left(\frac{1+9x}{x+1}\right)'=\frac{(x+1)\,(1+9x)'-(1+9x)\,(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(x+1)\,(+9)-(1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{8}{(x+1)^2};$$

b) $$\left(\frac{x^3}{4-x}\right)'=\frac{(4-x)\,(x^3)'-x^3\,(4-x)'}{(4-x)^2}=\frac{(4-x)\,3x^2-x^3\,(-1)}{(4-x)^2}=\frac{12x^2-2x^3}{(4-x)^2}.$$

Pratimai

5. Raskite šių funkcijų išvestines taškuose $x=x_0$, $x=1$:

a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{5x+4}$; b) $g(x)=\dfrac{x^2-1}{4-8x}$; c) $h(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x}$;

d) $v(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{3x-x^3}$; e) $u(x)=\dfrac{x^3-\sqrt{x}}{x^2-5}$;

f) $w(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2x^2-5x^3}{x-3x^3}$.

6. Įrodykite, kad yra teisinga formulė

$$\left[\frac{k}{f(x)}\right]'=\frac{-kf'(x)}{f^2(x)},$$

jeigu funkcija $f(x)$ diferencijuojama taške x (kuriame $f(x)\neq 0$) ir k yra skaičius.

§ 17. SUDĖTINĖS IR ATVIRKŠTINĖS FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS

1. Sudėtinė funkcija. Matematikoje plačiai vartojama sudėtinės funkcijos sąvoka. Ir šiame matematikos kurse, nagrinėdami įvairius klausimus, jau ne kartą esame susidūrę su sudėtinėmis funkcijomis.

Pavyzdžiui, skaičiuodami funkcijos $f(x)=\lg(x^2-x+2)$, $x\in R$, reikšmę kokiame nors taške x_0, darome šitaip: randame kvadratinio trinario $g(x)=x^2-x+2$ reikšmę taške x_0, t.y. $y_0=g(x_0)$, po to randame jos logaritmo reikšmę, t.y. $\varphi(y_0)=\lg y_0=\lg g(x_0)$. Taigi $f(x_0)=\varphi[g(x_0)]$. Jeigu x_0 laikysime kintamuoju, tai gausime kintamojo x funkciją $f(x)=\varphi[g(x)]$. Funkcija $f(x)=\varphi[g(x)]$ ir yra *sudėtinė* funkcija, sudaryta iš funkcijų g ir φ.

Sakykime, duotos dvi funkcijos $y=g(x)$ ir $z=\varphi(y)$, be to, funkcijos g reikšmių aibė yra funkcijos φ apibrėžimo srities poaibis. Funkcija, išreikšta formule $z=\varphi[g(x)]$, vadinama *sudėtine funkcija,* sudaryta iš funkcijų g ir φ, arba funkcijų g ir φ *superpozicija.*

Pavyzdžiui, funkcija $w=3\lg(1+x^2)$ yra sudėtinė funkcija, sudaryta iš paprastesnių funkcijų $z=3\lg y$ ir $y=1+x^2$.

Analogiškai galima nagrinėti sudėtines funkcijas, kurios yra daugiau negu dviejų funkcijų superpozicija. Pavyzdžiui, į funkciją $z=\lg(1+\sqrt{x})$ galima žiūrėti kaip į superpoziciją funkcijų $z=\lg v$, $v=1+y$, $y=\sqrt{x}$.

Mokykliniame geometrijos kurse vartojama šiek tiek kitokia terminologija, nes geometrijos kurse funkcijos dažniausiai vadinamos atovaizdžiais. Todėl atovaizdis, išreikštas formule $z=\varphi[g(x)]$, yra vadinamas atovaszdžių g ir φ *kompozicija* ir žymimas simboliu $z=\varphi\circ g$. Atkreipsime dėmesį, kad simbolis $\varphi\circ g$ yra skaitomas iš dešinės į kairę: „$\varphi\circ g$ yra atovaizdžių (funkcijų) g ir φ kompozicija". Kompoziciją sudarantys atovaizdžiai randami ta tvarka, kuria jie skaitomi.

Pavyzdys. Iš funkcijų $g(x)=x^2+\sqrt{x}$ ir $\varphi(x)=\lg x+x^3+1$ sudarykite $g\circ\varphi$ ir $\varphi\circ g$.

Sprendimas.

$$g\circ\varphi=g[\varphi(x)]=(\lg x+x^3+1)^2+\sqrt{\lg x+x^3+1},$$

$$\varphi\circ g=\varphi[g(x)]=\lg(x^2+\sqrt{x})+(x^2+\sqrt{x})^3+1.$$

Iš to pavyzdžio išplaukia, kad sudėtinės funkcijos $\varphi\circ g$ ir $g\circ\varphi$ yra skirtingos.

Taigi dviejų skirtingų funkcijų superpozicijos rezultatas priklauso nuo tų funkcijų eilės tvarkos, t.y. apskritai $\varphi[g(x)]\neq g[\varphi(x)]$, jeigu $\varphi(x)\neq g(x)$.

Pratimai

1. Iš funkcijų $f(x)=x^2+3x-1$, $g(x)=\lg x+3$, $h(x)=\sqrt{x}+\frac{x-1}{x^2+1}$ sudarykite: $f\circ g$, $f\circ h$, $g\circ h$, $g\circ f$, $h\circ f$, $h\circ g$.

2. Pateiktąsias funkcijas užrašykite kaip paprastesnių funkcijų kompoziciją:

a) $y=\sqrt{x^2+3x+4}$; b) $y=\dfrac{1}{x^2+5x+1}$;

c) $y=\sqrt{x-2\sqrt{x}}$; d) $y=\lg(3x^2+x+4)$;

e) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-\lg x}}$; f) $y=\dfrac{1}{\lg(x^2+x^3)}$;

g) $y=\dfrac{x+1}{3+\sqrt{x}+\lg x}$; h) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}+\lg(1+x)}$.

2. Sudėtinės funkcijos išvestinė.

Teorema. *Sakykime, funkcija* $y=g(x)$, $x\in]a;\,b[$, *turi išvestinę taške* $x_0\in]a;\,b[$, *o funkcija* $z=\varphi(y)$ *yra apibrėžta atvirajame intervale, kurio poaibis yra funkcijos f reikšmių aibė, ir turi išvestinę taške* $y_0=g(x_0)$. *Tada sudėtinė funkcija* $\Phi(x)=\varphi[g(x)]$ *taške* x_0 *turi išvestinę, kuri randama iš formulės* $\Phi'(x_0)=\varphi'(y_0)\cdot g'(x_0)$ *arba, praleidus argumentų reikšmes,*

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Įrodymas. Remiantis teoremos sąlyga, funkcija $z=\varphi(y)$ turi išvestinę taške y_0, todėl (žr. § 15, 2 skirsnį, (2) formulę)

$$\varphi(y)-\varphi(y_0)=[\varphi'(y_0)+\alpha(y)](y-y_0); \qquad (1)$$

čia

$$\lim_{y\to y_0}\alpha(y)=0. \qquad (2)$$

Analogiškai $y=g(x)$ turi išvestinę taške x_0, todėl

$$y-y_0=g(x)-g(x_0)=[g'(x_0)+\beta(x)](x-x_0); \qquad (3)$$

čia

$$\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0. \qquad (4)$$

Remdamiesi (1) ir (3) lygybėmis, gausime

$$\Phi(x)-\Phi(x_0)=\varphi[g(x)]-\varphi[g(x_0)]=$$
$$=\varphi(y)-\varphi(y_0)=[\varphi'(y_0)+\alpha(y)][g'(x_0)+\beta(x)](x-x_0). \qquad (5)$$

Dabar įrodysime, kad

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(y)=\lim_{x\to x_0}\alpha\big(g(x)\big)=0. \qquad (6)$$

Remiantis sąlyga, $g(x)$ turi išvestinę taške x_0, vadinasi, ji yra tolydi tame taške, todėl

$$\lim_{x\to x_0}y=\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)=y_0.$$

Taigi

$$y \to y_0, \quad \text{kai} \quad x \to x_0. \tag{7}$$

Remiantis (7) sąryšiu, $y \to y_0$, kai $x \to x_0$; kita vertus, remiantis (2) lygybe, $\alpha(y) \to 0$, kai $y \to y_0$. Todėl $\alpha(y) = \alpha(g(x)) \to 0$, kai $x \to x_0$.

Remdamiesi (5) sąryšiu, randame santykį

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \left[\varphi'(y_0) + \alpha\left(g(x)\right)\right] [g'(x_0) + \beta(x)]. \tag{8}$$

Dabar rasime sudėtinės funkcijos išvestinę, remdamiesi išvestinės apibrėžimu ir (4), (6), (8) sąryšiais:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[\varphi'(y_0) + \alpha\left(g(x)\right)\right] [g'(x_0) + \beta(x)] =$$

$$= \varphi'(y_0)\, g'(x_0),$$

nes $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha\left(g(x)\right) = 0$ ir $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

Taigi

$$\Phi'(x_0) = \varphi'(y_0) \cdot g'(x_0)$$

arba

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{9}$$

Teorema įrodyta.

1 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x) = (x^2 + 3x + 10)^2$$

išvestinę.

Sprendimas. Duotąją funkciją nagrinėsime kaip sudėtinę, būtent kaip funkcijų $u(x)$ ir $y(u)$ kompoziciją, laikydami $y(u) = u^2$ ir $u(x) = x^2 + 3x + 10$. Tada, remdamiesi (9) formule, gausime

$$f'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (u^2)' \cdot (x^2 + 3x + 10)' =$$

$$= 2u \cdot (2x + 3) = 2(x^2 + 3x + 10)(2x + 3).$$

2 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$h(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3$$

išvestinę.

Sprendimas. Duotąją funkciją užrašysime kaip dviejų funkcijų superpoziciją $h(x) = u\left(y(x)\right)$, laikydami

$$u(y) = y^3 \quad \text{ir} \quad y(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Remdamiesi (9) formule, gausime

$$h'(x)=\frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dx}=(y^3)'\left(\frac{x}{x+1}\right)'=3y^2\,\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{3x^2}{(x+1)^4}.$$

Pratimas

3. Raskite šių funkcijų išvestines:

a) $y=(23+15x+x^3)^2$; b) $y=(x^2-3)^3$;

c) $y=\left(\frac{1+x}{x^2-x}\right)^2$; d) $y=\left(\frac{x^2+x+1}{x^3-3x^2-5x}\right)^3$.

3. Atvirkštinės funkcijos išvestinė.

Teorema. *Jeigu funkcija $f(x)$, $x\in]a;\,b[$, ir atvirkštinė funkcija $f^{-1}(y)$, $y\in E(f)$, turi išvestines, tai*

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}}. \qquad (1)$$

Įrodymas. Nagrinėsime sudėtinę funkciją $f^{-1}\big(f(x)\big)$, $x\in]a;\,b[$. Remiantis atvirkštinės funkcijos apibrėžimu,

$$f^{-1}\big(f(x)\big)=x$$

kiekvienam $x\in]a;\,b[$. Remiantis sudėtinės funkcijos išvestinės teorema,

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}\cdot\frac{df(x)}{dx}=1.$$

Iš čia ir išplaukia (1) formulė.

§ 18. KAI KURIŲ ELEMENTARIŲJŲ FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS

1. Ribos, susijusios su skaičiumi *e*. 11 paragrafo 8 skirsnyje įrodėme, kad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

egzistuoja, ir tą ribą pažymėjome e.

Kadangi $[z]\leqslant z\leqslant [z]+1$, tai, pažymėję $n=[z]$, gausime nelygybes

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

kiekvienam $z>1$. Iš čia ir iš tarpinės funkcijos ribos teoremos, remdamiesi 11 paragrafo 8 skirsnio rezultatais, gauname:

$$\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e. \qquad (1)$$

Pakeitę kintamąjį $y=-z$, iš (1) formulės galime gauti

$$\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e. \qquad (2)$$

Iš (1) ir (2) formulių išplaukia, kad

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e. \qquad (3)$$

(3) formulėje pakeisime $z=\frac{1}{x}$. Kadangi $x\to0$, kai $z\to\infty$, ir atvirkščiai, $z\to\infty$, kai $x\to0$, tai

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \qquad (4)$$

Remdamiesi (4) formule, įrodysime, kad

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (5)$$

Kadangi

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

tai, remiantis logaritminės funkcijos tolydumu ir (4) formule,

$$\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

Taigi (5) formulė įrodyta.

Įrodysime, kad iš (5) išplaukia formulė

$$\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1. \qquad (6)$$

Iš tikrųjų, pažymėję $t=\ln(1+x)$, gausime

$$\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1.$$

2. Rodiklinės funkcijos išvestinė. Nagrinėsime funkciją $f(x)=e^x$, $x\in R$.

Teorema. *Funkcija e^x turi išvestinę kiekviename skaičių tiesės taške, ir ta išvestinė randama iš formulės*

$$(e^x)'=e^x. \qquad (1)$$

Įrodymas. Sakykime, x_0 yra koks nors skaičių tiesės taškas. Tada

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} e^{x_0}\,\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}=e^{x_0}.$$

Taigi $f'(x_0)=e^{x_0}$.

Kadangi x_0 yra bet koks skaičių tiesės taškas, tai paskutinėje formulėje x_0 galima pakeisti x. Vadinasi,

$$f'(x)=(e^x)'=e^x.$$

Išvada. *Rodiklinė funkcija $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in R$, yra diferencijuojama kiekviename skaičių tiesės taške, o jos išvestinė randama iš formulės*

$$(a^x)'=a^x\ln a. \tag{2}$$

Įrodymas. Remdamiesi sudėtinės funkcijos išvestinės formule, po to (1) formule, gausime

$$f'(x)=e^{x\ln a}(x\ln a)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\ln a.$$

Taigi $(a^x)'=a^x\ln a$.

1 pavyzdys. Raskime funkcijos $y=e^{x^2+1}$ išvestinę.

Sprendimas. Remdamiesi sudėtinės funkcijos išvestinės formule, po to (1) formule, randame duotosios funkcijos išvestinę:

$$y'=(e^{x^2+1})'=e^{x^2+1}(x^2+1)'=e^{x^2+1}\cdot 2x.$$

2 pavyzdys. Išdiferencijuokime funkciją

$$y=8^{x^2+x+1}.$$

Sprendimas. Šios funkcijos išvestinę randame, remdamiesi sudėtinės funkcijos išvestinės formule ir (2) formule:

$$y'=(8^{3x^2+x+1})'=8^{3x^2+x+1}\ln 8\cdot(3x^2+x+1)'=8^{3x^2+x+1}\ln 8\cdot(6x+1).$$

3 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$y=(x^3+4x+16)\,4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}$$

išvestinę.

Sprendimas. Remdamiesi iš pradžių sandaugos ir sudėtinės funkcijos išvestinės formulėmis, po to (2) formule, gausime

$$y=(x^3+4x+16)'\,4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}+\left(4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}\right)'(x^3+4x+16)=$$

$$=4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}\cdot(3x^2+4)+4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}\cdot\ln 4\cdot\left(\frac{5}{4}x^2+x+3\right)'(x^3+4x+16)=$$

$$=4^{\frac{5}{4}x^2+x+3}\left[3x^2+4+\ln 4\cdot\left(\frac{5}{2}x+1\right)(x^3+4x+16)\right].$$

1. Raskite šių funkcijų išvestines:

a) $y=(x+1)e^x$; b) $y=x^2e^{x^2+3x}$; c) $y=\frac{x^2+1}{e^x}$;

d) $y=x\cdot 2^{3x+x^2}$; e) $y=(3x+5x^2+x^3)\cdot 4^{x^2}$;

f) $y=\frac{3x+1}{e^x}-14^{x^2+3x+5}$; g) $y=(x^2+4)e^{-x^2}$;

h) $y=(x^2+x^3+1)2^{-x^2+5x+\frac{4}{5}}$; i) $y=(3^2+x^3+7x)3^{x^2+36x+10}$.

3. Logaritminės funkcijos išvestinė. Nagrinėsime funkciją $y=\ln x$, $x\in R_+$. Rasime jos išvestinę, remdamiesi apibrėžimu ir 1 skirsnio (5) formule:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right\}=\frac{1}{x}.$$

Taigi

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \quad (1)$$

Dabar nagrinėsime logaritminę funkciją $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $x\in R_+$. Kaip žinoma, $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$, todėl

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

Teorema. *Logaritminė funkcija yra diferencijuojama savo apibrėžimo srityje, o jos išvestinė randama iš formulės*

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}. \quad (2)$$

1 pavyzdys. Išdiferencijuokime funkciją

$$y=\ln(x^2+3x+9).$$

Sprendimas. Remdamiesi sudėtinės funkcijos išvestinės ir (1) formulėmis, gausime

$$y'=[\ln(x^2+3x+9)]'=\frac{(x^2+3x+9)'}{x^2+3x+9}=\frac{2x+3}{x^2+3x+9}.$$

2 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$y=\log_2(x^3+3x^2+4x+2)$$

išvestinę.

Sprendimas. Šios funkcijos išvestinę randame, remdamiesi sudėtinės funkcijos išvestinės ir (2) formulėmis:

$$y'=[\log_2(x^3+3x^2+4x+2)]'=\frac{(x^3+3x^2+4x+2)'}{(x^3+3x^2+4x+2)\ln 2}=\frac{3x^2+6x+4}{(x^3+3x^2+4x+2)\ln 2}.$$

3 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$y=(x^2+3)\ln(2x+1)$$

išvestinę.

Sprendimas. Remdamiesi sandaugos ir sudėtinės funkcijos išvestinės formulėmis, taip pat (1) formule, gausime

$$y'=(x^2+3)'\ln(2x+1)+(x^2+3)[\ln(2x+1)]'=$$

$$=2x\ln(2x+1)+(x^2+3)\frac{(2x+1)'}{2x+1}=2x\ln(2x+1)+\frac{(x^2+3)\cdot 2}{2x+1}.$$

Pratimas

2. Raskite išvestines šių funkcijų:

a) $y=(x^2-1)\ln x^3$; b) $y=\dfrac{\ln x}{x-1}$; c) $y=\dfrac{x^2}{3\ln x}$;

d) $y=a^{x^2}\ln(x^2+4x+12)$; e) $y=e^{(x+1)}\ln(x+5)$;

f) $y=(3x+4)\log_5(x+1+x^2)$; g) $y=x^2\ln\left(\dfrac{1}{1-x}+3x+5x^3\right)$.

4. Laipsninės funkcijos išvestinė. Nagrinėsime laipsninę funkciją $y=x^\alpha$, $\alpha\in R$. Paprastai laipsninė funkcija, kai α yra bet koks realusis skaičius, nagrinėjama su visais $x>0$, t.y. intervale $]0;+\infty[$. Tada

$$x^\alpha=e^{\alpha\ln x},$$

todėl, remiantis sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisykle,

$$(x^\alpha)'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^\alpha\frac{\alpha\cdot 1}{x}=\alpha x^{\alpha-1},$$

t.y.

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}. \qquad (1)$$

Atkreipsime dėmesį, kad su kai kuriais α, pavyzdžiui, natūriniais, laipsninė funkcija yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje. Pažymėję $x=-z$, $z>0$, gausime $x^\alpha=(-z)^\alpha=(-1)^\alpha z^\alpha$. Kadangi pastovų daugiklį galima iškelti prieš išvestinės ženklą, tai, remiantis (1) formule ir sudėtinės funkcijos išvestinės teorema,

$$(x^\alpha)'=[(-1)^\alpha z^\alpha]'=(-1)^\alpha[z^\alpha]'=(-1)^\alpha\cdot\alpha z^{\alpha-1}\cdot z'=$$

$$=(-1)^\alpha\cdot\alpha z^{\alpha-1}(-1)=(-1)^{\alpha-1}\cdot z^{\alpha-1}\cdot\alpha(-1)^2=\alpha x^{\alpha-1},$$

t.y.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Taigi tuo atveju (1) formulė yra teisinga.

Pavyzdžiai

a) Sakykime, $y=x$; tada $y'=(x)'=1\cdot x^{1-1}=1$.

b) Sakykime, $y=x^{10}$; tada $y'=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$.

c) Jeigu $y=\sqrt{x}$, tai $y'=(\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

d) Jeigu $y=x^{\sqrt{3}}$, tai $y'=(x^{\sqrt{3}})'=\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$.

e) Jeigu $y=\sqrt[5]{x^4}$, tai $y'=(\sqrt[5]{x^4})'=\left(x^{\frac{4}{5}}\right)'=\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1}=\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}$.

f) Sakykime, $y=\frac{1}{3\sqrt{x+1}}$; tada

$$y'=\left(\frac{1}{3\sqrt{x+1}}\right)'=\frac{1}{3}\left[(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right]'=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{1}{2}-1}(x+1)'=-\frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 1=-\frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Iš (1) formulės, kai $\alpha=n$, $n\in N$, ir iš sumos diferencijavimo taisyklės išplaukia, kad *polinomas yra diferencijuojama skaičių tiesėje funkcija, be to,*

$$(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)'=$$
$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_n. \quad (2)$$

Kadangi trupmeninė racionalioji funkcija yra užrašoma kaip dviejų polinomų dalmuo, tai iš (2) formulės ir dalmens išvestinės teoremos išplaukia, kad *trupmeninė racionalioji funkcija yra diferencijuojama visoje apibrėžimo srityje.*

Pavyzdžiai

a) Sakykime, $y=x^3+3x^5+10x^7$; tada $y'=3x^2+15x^4+70x^6$.

b) Jeigu $y=13x^4+\sqrt{x}+\frac{8}{x^2}-\frac{9}{x^{10}}$, tai $y'=52x^3+\frac{1}{2\sqrt{x}}-16x^{-3}+$ $+90x^{-11}$.

c) Sakykime, $y=(\sqrt{x}+3\sqrt[5]{x^2}+\ln x+10^{\sqrt{2}})^4$; tada

$$y'=4(\sqrt{x}+3\sqrt[5]{x^2}+\ln x+10^{\sqrt{2}})^{4-1}(\sqrt{x}+3\sqrt[5]{x^2}+\ln x+10^{\sqrt{2}})'=$$

$$=4(\sqrt{x}+3\sqrt[5]{x^2}+\ln x+10^{\sqrt{2}})^3\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{6}{5}x^{-\frac{3}{5}}+\frac{1}{x}\right].$$

3. Raskite išvestines šių funkcijų:

a) $y=x^{100}$; b) $y=-x^5$; c) $y=\sqrt[10]{x^7}$;

d) $y=\sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$; e) $y=\dfrac{1}{5\sqrt{11x}}$; f) $y=\dfrac{x^2+3x+x^7}{\sqrt{x^2+1}}$;

g) $y=\dfrac{\sqrt[7]{x}+\sqrt[9]{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x\sqrt{x^3}}}$; h) $y=\dfrac{4\sqrt[9]{x+x^2}+9\sqrt[11]{x}}{3\sqrt[3]{x}+7\sqrt{x}}$; i) $y=x^{\sqrt{5}}$;

j) $y=x^{\pi}$; k) $y=(2\sqrt[3]{x^2}+3x^3+x^7)^5$;

l) $y=(\lg\sqrt{x}+x^{\frac{1}{3}}+12^{\sqrt{2}})^3$; m) $y=\left(\ln\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$.

5. Išvestinių lentelė. Šiame skirsnyje yra išrašytos jums žinomos diferencijavimo formulės.

1. $(c)'=0$ (c — konstanta).

2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},\ \alpha\in R$.

Atskiru atveju

$$(x)'=1,$$

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. $(a^x)'=a^x\ln a$.

Atskiru atveju

$$(e^x)'=e^x.$$

4. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

Atskiru atveju

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},$$

$$(\lg x)'=\frac{1}{x\ln 10}.$$

5. $(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x)$.

6. $(u(x)\,v(x))'=u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$.

7. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{g(x)\,f'(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$.

8. $\dfrac{df(g(x))}{dx}=\dfrac{df(y)}{dy}\cdot\dfrac{dg(x)}{dx}$.

9. $\dfrac{df^{-1}(y)}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{df(x)}{dx}}$.

Pratimas

4. Naudodamiesi išvestinių lentele, raskite išvestines šių funkcijų:

a) $y=x^5-6x^4-8x^3-1$;

b) $y=\dfrac{7x^8+\sqrt{2}\,x^2+\sqrt{5}}{\sqrt{x}-1}$;

c) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-x-2^{\sqrt{3}}}{x^2-3\sqrt{x}-1}$;

d) $f(x)=(3x-x^2-x^{10})(\sqrt{x}+3x^7-8)$;

e) $f(t)=\dfrac{t^2+\sqrt{t}+3t^3}{\sqrt[3]{t}+t\sqrt[5]{t^4}}$;

f) $f(x)=(x^{10}+3x^{11}+\sqrt[7]{x^2})\ln x$;

g) $f(t)=(t+\sqrt{t})\,e^{t^2-1}$;

h) $f(t)=(\ln t+\sqrt[3]{t^2})\,e^{4t^3}$;

i) $y=\sqrt[10]{(x^7+x\sqrt{x}+1)^9}\,e^{\sqrt{x}}$;

j) $y=\dfrac{\ln(x^2+\sqrt[7]{x^6})}{2^{\sqrt{x}}+2^{\sqrt[3]{x}}}$;

k) $y=\dfrac{3^{t^2}+t^8+\sqrt[7]{t^3}}{\ln(t^3+\sqrt[8]{t^3}+2^t)}$.

6. Aukštesnių eilių išvestinės. Sakykime, funkcija $y=f(x)$ yra apibrėžta intervale $]a;\,b[$ ir kiekviename to intervalo taške turi išvestinę $f'(x)$; tada $f'(x)$ galima vadinti *pirmąja* duotosios funkcijos *išvestine* (arba *pirmosios eilės išvestine*). Nagrinėsime funkciją $g(x)=f'(x)$, $x\in]a;\,b[$. Jeigu $g(x)$ turi išvestinę taške $x_0\in]a;\,b[$, tai ta išvestinė vadinama *antrąja* funkcijos $f(x)$ *išvestine* (arba *antrosios eilės išvestine*) taške x_0 ir žymima $f''(x_0)$ arba $\dfrac{d^2f(x_0)}{dx^2}$.

Trumpiau sakant, antroji išvestinė yra pirmosios išvestinės išvestinė, t.y.

$$y''=(y')',\quad \text{arba}\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]=\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$[f'(x)]'=f''(x),\quad \text{arba}\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{df}{dx}\right]=\frac{d^2f}{dx^2}.$$

Jeigu funkcija $f'(x)$ turi išvestinę kiekviename intervalo $]a;\,b[$ taške, tai sakoma, kad $f''(x)$ yra apibrėžta visame intervale $]a;\,b[$.

$f''(x)$ išvestinė, t.y. $(f''(x))' = f'''(x)$, jeigu ji egzistuoja, yra vadinama *trečiąja* funkcijos $f(x)$ *išvestine* (arba *trečiosios eilės išvestine*) ir t.t. Apskritai funkcijos $y = f(x)$ *n-ąja išvestine* (arba *n-osios eilės išvestine*) taške x (arba kuriame nors intervale $]a; b[$) vadinama $(n-1)$-osios eilės išvestinės išvestinė tame taške x (arba tame intervale $]a; b[$), funkcijos $y = f(x)$ n-oji išvestinė žymima

$$\frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad y^{(n)}, \quad \text{arba} \quad f^{(n)}(x).$$

Pavyzdžiai

a) Jeigu $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$, tai

$$f'(x) = 3x^2 + 6x, \quad f''(x) = 6x + 6,$$

$$f'''(x) = 6, \quad f^{IV}(x) = f^{V}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = 0.$$

b) Jeigu $y = x \ln x$, tai

$$y' = (x)'(\ln x) + x(\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

$$y'' = (1 + \ln x)' = (1)' + (\ln x)' = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

$$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad y^{IV} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2 \cdot x}{x^4} = \frac{2}{x^3},$$

$$y^{V} = \frac{2(-3)}{x^4} = \frac{-3!}{x^4},$$

$$y^{VI} = 2(-3)(-4)x^{-5} = \frac{4!}{x^5}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}, \quad \ldots$$

Pratimai

5. Raskite aukštesnių eilių išvestines:

a) $y = x^{10} + 3x^5 + \sqrt{2}\, x^3 + \sqrt[5]{7}$; b) $y = (x+3)^4$; c) $y = (4x^2 + 3x + 1)^3$;

d) $y = e^x + x^2$; e) $y = 1 + x^5 + e^x$; f) $y = e^x + \ln x$.

6. Kiek kartų reikia diferencijuoti funkciją $y = (x^2 + 1)^{50}$, kad gautume 30-ojo laipsnio polinomą?

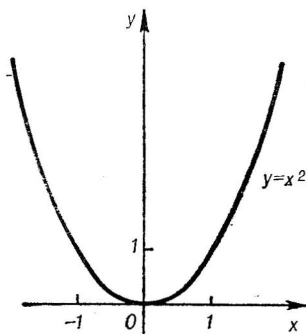
7. Įrodykite, kad funkcija $y = x^2 + e^x$ tenkina lygtį $y^{IV} = y^{V}$.

§ 19. KREIVĖS LIESTINĖ IR NORMALĖ

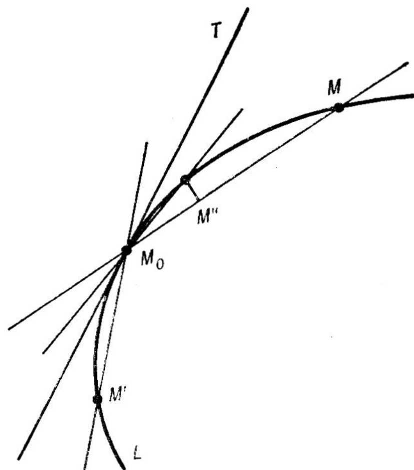
1. Apie kreivės liestinės ir normalės sąvoką. Geometrijos kurse jūs jau susipažinote su liestinės sąvoka, būtent – apskritimo liestinė buvo apibrėžta kaip tiesė, esanti vienoje plokštumoje su apskritimu ir turinti su juo vienintelį bendrą tašką. Tačiau toks liestinės apibrėžimas netinka, kai kreivė yra bet kokia. Pavyzdžiui, parabolė $y = x^2$ (68 pav.) su ašimis

Ox ir Oy turi po vieną bendrą tašką, bet tik Ox ašis yra jos liestinė, o Oy ašis nėra liestinė.

Dabar įvesime plokščios arba erdvinės (69 pav.) kreivės L liestinės taške M_0 sąvoką. Sakykime, M yra kuris nors kreivės L taškas, nesutampantis su M_0. Tiesė M_0M, einanti per taškus M_0 ir M, vadinama kreivės L *kirstine*. Dabar tašką M kreive L artinkime prie taško M_0. Tada taško M padėtys bus M', M'' ir t.t., o kirstinė M_0M suksis apie tašką M_0, užim-



68 pav.



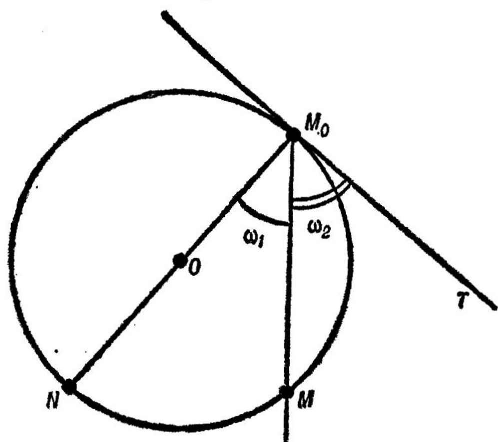
69 pav.

dama atitinkamai padėtis (M_0M), (M_0M'), (M_0M'') ir t.t. Gali būti, kad kirstinė M_0M artės prie kurios nors ribinės padėties (M_0T), kai taškas M kreive L artės prie taško M_0. Tiesę M_0T ir vadinsime kreivės L liestine taške M_0. Taigi tiesė M_0T yra vadinama *kreivės L liestine taške M_0*, jeigu kampas MM_0T tarp spindulio M_0T ir spindulio M_0M artėja prie nulio, kai taškas M kreive L artėja prie taško M_0.

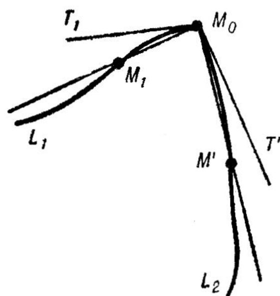
Pastaba. Sakykime, kreivė L yra apskritimas. Lengvai galima įrodyti, kad apskritimo liestinės apibrėžimas sutaps su tuo, kuriuo iki šiol rėmėtės geometrijoje (70 pav.). Iš tikrųjų, jeigu (M_0T) yra tiesė, esanti vienoje plokštumoje su apskritimu ir turinti su juo vieną bendrą tašką, tai, remiantis žinoma teorema, ji yra statmena skersmeniui M_0N, o kampo OM_0M didumas artėja prie 90°, kai taškas M artėja prie taško M_0 apskritimu L, taigi kampo MM_0T didumas artėja prie nulio ($\omega_1 = O\widehat{M_0}M \to 90°$ ir $\omega_2 = M\widehat{M_0}T \to 0°$, kai $M \to M_0$ kreive L).

Pabrėšime, kad ne kiekviena kreivė bet kuriame taške turi liestinę. Paprasčiausias tokios kreivės pavyzdys pavaizduotas 71 paveiksle. Kreivę L sudaro du lankai L_1 ir L_2. Imkime lanke L_1 tašką M_1 ir išveskime kirstinę M_0M_1, o lanke L_2 – tašką M' ir išveskime kirstinę M_0M'. Akivaizdu, kad kirstinė M_0M_1 artės prie kokios nors ribinės padėties (M_0T_1),

kai taškas M_1 artės prie taško M_0 lanku L_1, o kirstinė M_0M' artės prie ribinės padėties (M_0T'), kai taškas M' artės prie taško M_0 kreive L_2. Vadinasi, gavome dvi skirtingas tieses M_0T' ir M_0T_1, taigi kreivė L neturi liestinės taške M_0.



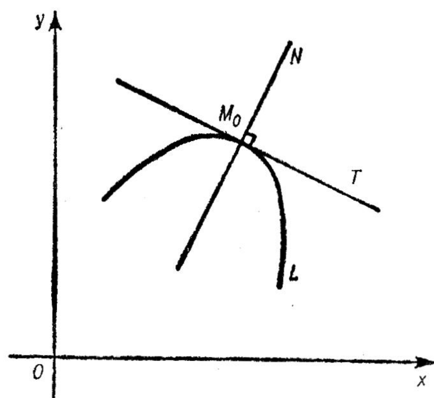
70 pav.



71 pav.

Dabar suformuluosime kreivės normalės apibrėžimą: tiesė, einanti per lietimo tašką M_0 ir statmena kreivės L liestinei taške M_0, yra vadinama *kreivės L normale taške M_0*.

Pavyzdžiui, sakykime, tiesė M_0T yra kreivės L liestinė taške M_0. Nubrėžkime tiesę M_0N taip, kad būtų $(M_0N) \perp (M_0T)$ (72 pav.). Tada tiesė M_0N yra duotosios kreivės L normalė taške M_0.



72 pav.

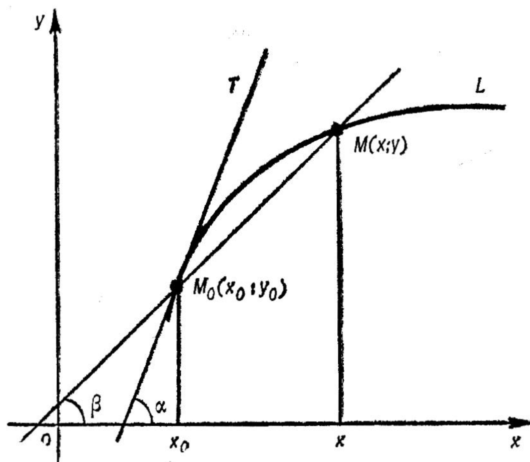
2. Geometrinė išvestinės prasmė. Geometrinis funkcijos išvestinės duotajame taške aiškinimas yra tampriai susijęs su tos funkcijos grafiko kreivės liestinės sąvoka.

Sakykime, duota tolydžioji funkcija $y=f(x)$, $x \in]a; b[$, kurios grafikas yra kreivė L (73 pav.).

Kreivėje L imkime taškus $M_0(x_0; y_0)$ ir $M(x; y)$. Per tuos taškus išveskime tiesę M_0M – kreivės L kirstinę. Kirstinės M_0M krypties koeficientas yra

$$k = \operatorname{tg} \beta = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Sakykime, $x \to x_0$, t.y. taško M abscisė artėja prie taško M_0 abscisės, vadinasi, taškas M artėja prie taško M_0 kreive L. Tomis sąlygomis kirstinė M_0M, apskritai kalbant, keičia savo padėtį, sukdamasi apie tašką M_0, t.y. kinta kampas β. Sakykime, egzistuoja tiesė M_0T, kuri yra ribinė kirstinės padėtis, kai taškas M priartėja kreive prie taško M_0. Ta tiesė, kaip žinoma, bus kreivės L (funkcijos grafiko) liestinė taške M_0.



73 pav.

Jeigu funkcija f yra diferencijuojama taške x_0, tai

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to x_0} k = \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Vadinasi, diferencijuojamos taške x_0 funkcijos $y=f(x)$, $x \in]a; b[$, grafikas taške $(x_0; f(x_0))$ turi liestinę, kurios krypties koeficientas yra $f'(x_0)$.

Teisingas ir atvirkštinis teiginys: jeigu funkcijos $y=f(x)$, $x \in]a; b[$, grafikas taške $(x_0; f(x_0))$ turi liestinę, tai funkcija f yra diferencijuojama taške x_0 ir jos išvestinė yra lygi liestinės krypties koeficientui.

Vadinasi, išvestinės geometrinę prasmę reikia aiškinti šitaip: jeigu funkcija turi išvestinę taške, tai tame taške egzistuoja jos grafiko liestinė; be to, išvestinės reikšmė taške sutampa su funkcijos grafiko tame taške krypties koeficientu.

3. Kreivės liestinės ir normalės lygtys. Iš geometrijos kurso žinote, kad stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje tiesės su krypties koeficientu k, einančios per tašką $M_0(x_0; y_0)$, lygtis yra

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (1)$$

Todėl, (1) lygtyje paėmę

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{ir} \quad k = f'(x_0),$$

gausime kreivės L liestinės taške $(x_0; f(x_0))$ lygtį

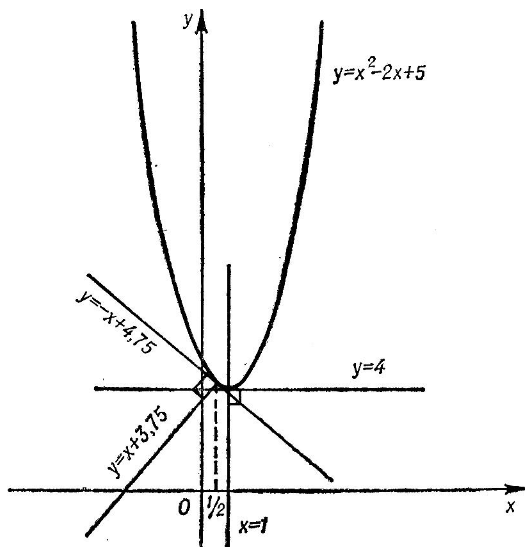
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2)$$

Kaip žinoma, dviejų tiesių su krypties koeficientais k ir k_1 statmenumo sąlyga yra $k \cdot k_1 = -1$, t.y.

$$k_1 = -\frac{1}{k}. \qquad (3)$$

Vadinasi, remiantis (3) sąlyga ir (2) liestinės lygtimi, kreivės L normalės taške $M_0(x_0; f(x_0))$ lygtis yra

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (4)$$



74 pav.

Pastaba. (4) lygtis aprašo kreivės $y = f(x)$, $x \in]a; b[$, normalę taške $(x_0; f(x_0))$, jeigu tame taške egzistuoja baigtinė nelygi nuliui išvestinė.

Jeigu išvestinė taške lygi nuliui, tai kreivės $y = f(x)$, $x \in]a; b[$, liestinė tame taške egzistuoja ir yra lygiagreti Ox ašiai, jos lygtis (tai išplaukia iš (2) lygties): $y = f(x_0)$, nes $f'(x_0) = 0$. Remiantis normalės apibrėžimu, kreivės $y = f(x)$, $x \in]a; b[$, normalė tame taške taip pat egzistuoja ir yra statmena Ox ašiai; jos lygtis: $x = x_0$. Jeigu išvestinė taške $(x_0; f(x_0))$ yra

begalinė (t.y. $f'(x_0)=\infty$), tai kreivė $y=f(x)$, $x\in]a;\ b[$, tame taške turi liestinę, kurios lygtis yra $x=x_0$, ir taip pat turi normalę, kuri yra lygiagreti Ox ašiai ir kurios lygtis

$$y=f(x_0).$$

1 pavyzdys. Raskime parabolės $f(x)=x^2-2x+5$ liestinės ir normalės taškuose $x_1=0{,}5$ ir $x_2=1$ lygtis (74 pav.).

Sprendimas. Rasime funkcijos $f(x)$ reikšmes taškuose $x_1=0{,}5$ ir $x_2=1$:

$$f(0{,}5)=4{,}25,\quad f(1)=4.$$

Kadangi $f'(x)=2x-2=2(x-1)$, tai

$$f'(0{,}5)=-1,\quad f'(1)=0.$$

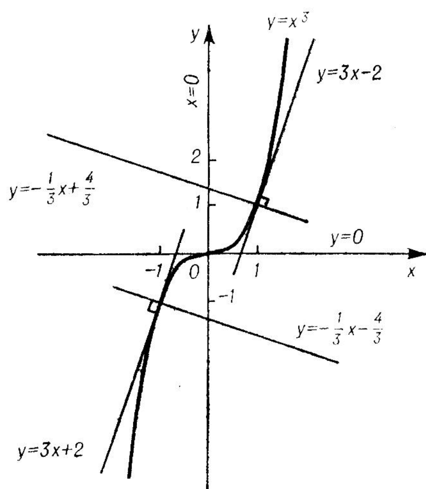
Rastąsias funkcijos ir jos išvestinės reikšmes įrašę į (2) ir (4), gausime liestinių ir normalių taškuose, kurių abscisės yra $x_1=0{,}5$ ir $x_2=1$, lygtis:

a) taške, kurio abscisė $x_1=0{,}5$:

$$y-4{,}25=-1\cdot(x-0{,}5),$$

$$y-4{,}25=-\frac{1}{-1}(x-0{,}5);$$

taigi tiesė $y=-x+4{,}75$ yra parabolės liestinė taške (0,5; 4,25), o tiesė $y=x+3{,}75$ – normalė tame pačiame taške;



75 pav.

b) taške, kurio abscisė $x_2=1$:

$$y-4=0(x-1).$$

Vadinasi, tiesė $y=4$ yra parabolės liestinė taške (1; 4), o tiesė $x=1$ yra parabolės normalė tame taške.

2 pavyzdys. Raskime kubinės parabolės $f(x)=x^3$ liestinių ir normalių lygtis, jeigu lietimo taškų abscisės yra $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ (75 pav.).

S p r e n d i m a s. Rasime funkcijos $f(x)=x^3$ reikšmes, kai $x_1=-1$, $x_2=0$ ir $x_3=1$: $f(-1)=-1$, $f(0)=0$ ir $f(1)=1$. Kadangi $f'(x)=(x^3)'=$ $=3x^2$, tai $f'(-1)=3$, $f'(0)=0$ ir $f'(1)=3$.

Gautąsias funkcijos ir jos išvestinės reikšmes įrašę į (2) ir (4), gausime liestinių ir normalių taškuose, kurių abscisės yra $x_1=-1$, $x_2=0$ ir $x_3=1$, lygtis:

a) taške, kurio abscisė $x_1=-1$:

$$y-(-1)=3\,\big(x-(-1)\big),$$

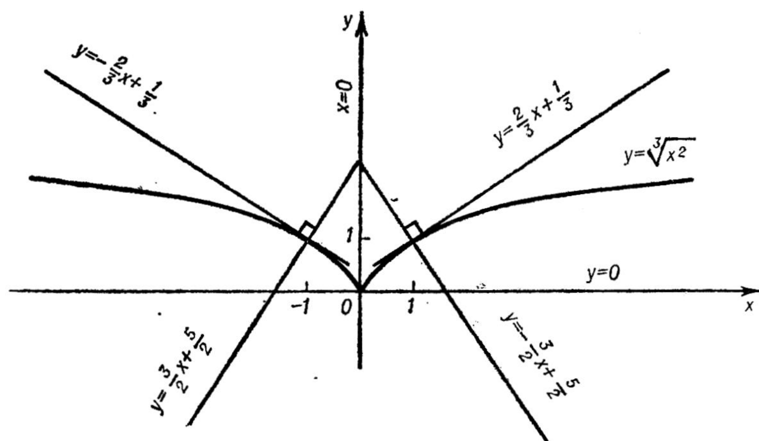
$$y-(-1)=\frac{-1}{3}\,\big(x-(-1)\big),$$

t.y. tiesė $y=3x+2$ yra parabolės liestinė taške $(-1;\ -1)$, o tiesė $y=$ $=-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$ – normalė tame taške;

b) taške, kurio abscisė $x_2=0$:

$$y-0=0\,(x-0),$$

t.y. tiesė $y=0$ yra parabolės liestinė taške $(0;\ 0)$, o tiesė $x=0$ – normalė tame taške;



76 pav.

c) taške, kurio abscisė $x_3=1$:

$$y-1=3\,(x-1),$$

t.y. tiesė $y=3x-2$ yra parabolės liestinė taške $(1;\ 1)$, o tiesė $y=-\frac{1}{3}x+$ $+\frac{4}{3}$ yra normalė tame taške, nes $y-1=\frac{-1}{3}\,(x-1)$.

3 p a v y z d y s. Raskime parabolės $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ liestinių ir normalių taškuose $x_1=-1$, $x_2=0$ ir $x_3=1$ lygtis (76 pav.).

Sprendimas. Apskaičiuosime funkcijos reikšmes duotuosiuose taškuose: $f(-1)=1$, $f(0)=0$ ir $f(1)=1$. Rasime funkcijos išvestinę $f'(x)=$ $=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ ir jos reikšmes duotuosiuose taškuose: $f'(-1)=-\frac{2}{3}$, $f'(0)=\infty$ ir $f'(1)=\frac{2}{3}$.

Taigi, funkcijos ir jos išvestinės reikšmes taškuose $x_1=-1$, $x_2=0$ ir $x_3=1$ įrašę į (2) ir (4), gausime parabolės $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ liestinių ir normalių taškuose, kurių abscisės yra $x_1=-1$, $x_2=0$ ir $x_3=1$, lygtis:

a) kai $x_1=-1$: $y-1=-\frac{2}{3}(x-(-1))$, $y-1=-\frac{1}{-\frac{2}{3}}(x-(-1))$, t.y. tiesė $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ yra parabolės liestinė taške $(-1;\ 1)$, o tiesė $y=\frac{3}{2}x+$ $+\frac{5}{2}$ – normalė tame taške;

b) kadangi $f'(0)=\infty$, kai $x_2=0$, tai, remiantis pastaba, tiesė $x=0$ (t.y. ordinačių ašis) yra parabolės $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ liestinė taške $(0;\ 0)$, o tiesė $y=f(0)=0$ (t.y. abscisių ašis) – jos normalė tame taške;

c) kai $x_3=1$: $y-1=\frac{2}{3}(x-1)$, $y-1=-\frac{1}{\frac{2}{3}}(x-1)$, t. y. tiesė $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ yra parabolės liestinė taške $(1;\ 1)$, o tiesė $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ – jos normalė tame taške.

Pratimai

1. Raskite parabolės $y=2x^2+1$ liestinių ir normalių taškuose, kurių abscisės yra $x_1=-1$, $x_2=0$ ir $x_3=1$, lygtis.

2. Raskite kreivės $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ liestinių ir normalių lygtis, kai lietimo taškų abscisės yra $x_1=0$, $x_2=1$ ir $x_3=3$.

3. Raskite kubinės parabolės $y=x^3$ liestinės taškuose, kurių abscisės yra $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2=0$ ir $x_3=\frac{\sqrt{3}}{3}$, posvyrio kampą.

4. Raskite kreivės $y=x-x^2$ liestinės taškuose, kurių abscisės yra $x_1=0$ ir $x_2=\frac{1}{2}$, krypties koeficientą.

5. Kokiame taške kreivės $y=\ln x$ liestinė pasvirusi į Ox ašį kampu $\frac{\pi}{4}$?

6. Kokiu kampu kreivės $y=e^x$ liestinė taške $(0;\ 1)$ kerta Ox ašį?

7. Raskite parabolės $y=x^2$ liestinių taškuose $(1;\ 1)$, $(-1;\ 1)$, $(2;\ 4)$ ir $(-2;\ 4)$ krypties koeficientus.

8. Raskite parabolės $y=\frac{4x-x^2}{4}$ liestinių taškuose $(0;\ 0)$, $(2;\ 1)$ ir $(4;\ 0)$ posvyrio į Ox ašį kampus.

§ 20. KAI KURIE FIZIKINIAI IŠVESTINĖS TAIKYMAI

15 paragrafo 1 skirsnyje jau išnagrinėjome taško tiesiaeigio judėjimo momentinio greičio ir momentinio srovės stiprumo uždavinius, kuriuos sprendžiant teko naudoti išvestinę. Pateiksime dar kelis tokių uždavinių pavyzdžius.

1. Kūno šiluminės talpos uždavinys. Norint 1 g masės kūną įšildyti nuo $t_1^\circ=0$ iki $t_2^\circ=\tau$, reikia jam perduoti tam tikrą šilumos kiekį Q; vadinasi, Q yra temperatūros τ, iki kurios kūnas šildomas, funkcija: $Q=Q(\tau)$. Sakykime, kūno temperatūra pakilo nuo τ_0 iki τ. Suvartotos šilumos kiekis yra $Q(\tau)-Q(\tau_0)$. Santykis

$$\frac{Q(\tau)-Q(\tau_0)}{\tau-\tau_0}$$

yra vidutinis šilumos kiekis, kurio reikia kūnui įšildyti 1°, kai temperatūra kinta nuo $t_1^\circ=\tau_0$ iki $t_2^\circ=\tau$. Tas santykis yra vadinamas kūno *vidutine šilumine talpa*, kai temperatūra kinta intervale $[\tau_0; \tau]$, ir žymimas c_{vid}.

Vidutinė šiluminė talpa neapibūdina šiluminės talpos bet kokioje temperatūroje τ, todėl įvedama šiluminės talpos duotoje temperatūroje τ_0 (duotajame taške τ_0) sąvoka.

Šiluminė talpa temperatūroje τ_0 (duotajame taške τ_0) yra vadinama riba

$$c(\tau)=\lim_{\tau\to\tau_0} c_{\text{vid}}=\lim_{\tau\to\tau_0}\frac{Q(\tau)-Q(\tau_0)}{\tau-\tau_0}=Q'(\tau_0).$$

Taigi šiluminė talpa $c(\tau)$ temperatūroje τ yra kūno gaunamo šilumos kiekio $Q(\tau)$ išvestinė temperatūros τ atžvilgiu, t.y.

$$c(\tau)=\frac{dQ(\tau)}{d\tau}=Q'(\tau).$$

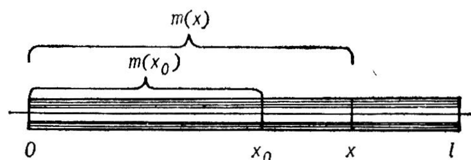
2. Cheminės reakcijos greičio uždavinys. Sakykime, kokia nors medžiaga dalyvauja cheminėje reakcijoje. Jau sureagavusios laiko momentu t medžiagos kiekį pažymėkime $y(t)$. Taigi y yra laiko (kintamojo t) funkcija. Sakykime, $[t_0; t]$ yra koks nors laiko tarpas; tada $y(t)-y(t_0)$ yra per tą laiko tarpą (nuo momento t_0 iki momento t) sureagavusios medžiagos kiekis. Vadinasi, santykis $\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ reiškia vidutinį cheminės reakcijos greitį per laikotarpį $[t_0; t]$. Norint apibūdinti cheminės reakcijos greitį konkrečiu momentu t_0, reikia nagrinėti to santykio ribą, kai $t\to t_0$, t.y.

$$\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}=y'(t_0).$$

Vadinasi, cheminės reakcijos greitis duotuoju laiko momentu t yra sureagavusios medžiagos kiekio $y(t)$ išvestinė laiko t atžvilgiu, t.y.

$$\frac{dy(t)}{dt}=y'(t).$$

3. Strypo linijinio tankio uždavinys. Strypu vadinamas toks fizikinis kūnas, kurio forma yra artima tiesės atkarpai, skersinis pjūvis – mažas ir visur vienodas. Sakykime, duotas ilgio l strypas (77 pav.). Kiekvieną ilgio x, $0 \leqslant x \leqslant l$, strypo atkarpą, atmatuotą nuo vieno fiksuoto galo, atitinka tam tikra masė m, taigi strypo masė yra jo ilgio funkcija: $m = m(x)$,



77 pav.

$x \in [0; l]$. Strypas vadinamas vienalyčiu, jeigu bet kurių dviejų vienodo ilgio jo dalių masės yra lygios. Tuo atveju bet kurios strypo dalies masės santykis su jos ilgiu yra tas pats dydis ρ, vadinamas *strypo linijiniu tankiu.* Strypas vadinamas nevienalyčiu, jeigu dviejų vienodo ilgio dalių masės yra apskritai skirtingos. Iškyla uždavinys – nustatyti nevienalyčio strypo masės kitimo greitį, kintant jo ilgiui. Tuo tikslu fizikai įveda *vidutinio linijinio tankio* sąvoką. Sakykime, $m(x) - m(x_0)$ yra masė strypo dalies, kurios galų atstumai nuo atkarpos pradžios yra x_0 ir x, $0 \leqslant x_0 < x \leqslant l$. Tada santykis $\frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$ yra vadinamas *vidutiniu linijiniu strypo tankiu* duotoje atkarpoje ir žymimas ρ_{vid}. Taigi vidutiniu linijiniu strypo tankiu yra vadinamas strypo masės ir jo ilgio santykis.

Kai strypas yra nevienalytis, vidutinis linijinis tankis ρ_{vid} negali pilnutinai apibūdinti masės kitimo, kintant ilgiui, greičio, nes apskritai ρ_{vid} įvairiose vienodo ilgio atkarpose yra skirtingas. Todėl, kai strypai yra nevienalyčiai, įvedama linijinio tankio konkrečiame taške sąvoka. *Linijiniu strypo tankiu taške* x_0 vadinama riba

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \rho_{vid} = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} = m'(x_0).$$

Taigi linijinis strypo tankis taške x yra masės išvestinė x atžvilgiu.

4. Antrosios išvestinės mechaninė prasmė (pagreitis). Sakykime, materialus taškas juda tiese pagal dėsnį $s = s(t)$, $t \in [0; T]$. Tada judėjimo greitis yra

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

(žr. § 15, 1 skirsnį).

Judėjimo greitis $v(t)$ yra taip pat laiko funkcija, todėl galima nagrinėti ir jo kitimo greitį:

$$v'(t) = (s'(t))' = s''(t) = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

Vartojant mechanikos terminus, $s''(t)$ yra *judėjimo pagreitis laiko momentu t.*

Taigi *judėjimo pagreitis* $a(t)$ *duotuoju laiko momentu* t yra greičio $v(t)$ išvestinė laiko atžvilgiu, arba antroji kelio išvestinė laiko atžvilgiu:

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

Pavyzdys. Sakykime, tiesiaeigio judėjimo greitis kinta pagal dėsnį

$$v(t)=5+3t+6t^2 \text{ (m/s)}.$$

Koks yra pagreitis laiko momentu $t=2$ s?

Sprendimas. Kadangi $a(t)=\frac{dv(t)}{dt}$, tai, radę

$$a(t)=v'(t)=3+12t \text{ (m/s}^2\text{)},$$

gausime:

$$a(2)=3+12\cdot 2=27 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Pratimai

1. Kūnas juda tiese pagal dėsnį $s(t)=3+2t+t^2$. Raskite jo greitį ir pagreitį laiko momentais $t_1=1$ s ir $t_2=3$ s.
2. Tiese judančio kūno greitis kinta pagal dėsnį $v(t)=4t+5t^2$ (m/s). Koks bus to kūno pagreitis, praėjus 5 s nuo judėjimo pradžios?
3. Įrodykite, kad pagreitis yra lygus nueitam keliui, kai kūnas juda pagal dėsnį $s(t)=ae^t+be^{-t}$ (m).
4. Taškas juda tiese pagal dėsnį $s=\sqrt{t}$. Įrodykite, kad jo pagreitis yra proporcingas greičio kubui.
5. Kūnas, kurio masė $m=0{,}5$ (kg), juda tiese pagal dėsnį $s(t)=2t^2+t-3$ (m). Raskite to kūno kinetinę energiją, praėjus 7 s nuo judėjimo pradžios.
6. Raskite jėgą F, veikiančią materialų masės m tašką, judantį pagal dėsnį $s(t)=$ $=t^2-4t^4$ (m), kai $t=3$ s.
7. Masės m kūnas juda pagal dėsnį $s(t)=3t^2+7t+9$ (m). Įrodykite, kad tašką veikianti jėga yra pastovi.

§ 21. FUNKCIJOS MONOTONIŠKUMO TYRIMAS, REMIANTIS IŠVESTINE

1. Funkcijos didėjimas ir mažėjimas.

1 apibrėžimas. Funkcija $f(x)$, $x\in]a;\ b[$, vadinama *didėjančia* intervale $]a;\ b[$, jeigu bet kuriems x_1 ir x_2, $x_1<x_2$, priklausantiems intervalui $]a;\ b[$, yra teisinga nelygybė $f(x_1)<f(x_2)$. Trumpiau, funkcija $f(x)$, $x\in]a;\ b[$, vadinama *didėjančia* intervale $]a;\ b[$, jeigu ji tenkina sąlygą

$$(\forall x_1\in]a;\ b[)(\forall x_2\in]a;\ b[)\left(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\right).$$

Suformuluosime funkcijos didėjimo atvirame intervale būtiną sąlygą.

1 teorema. *Jeigu diferencijuojama funkcija* $f(x)$, $x\in]a;b[$, *didėja intervale* $]a;b[$, *tai* $f'(x_0)\geqslant 0$, *imant bet kurį* x_0 *iš intervalo* $]a;b[$. ***Trumpiau,*** *didėjanti ir diferencijuojama intervale* $]a;b[$ *funkcija* f *tenkina sąlygą*

$$(\forall x_0\in]a;b[)\ f'(x_0)\geqslant 0.$$

Įrodymas. Remiantis didėjančios intervale $]a;b[$ funkcijos apibrėžimu,

$$(\forall x_0\in]a;b[)(\forall x\in]a;b[)\ \big(x_0<x\Rightarrow f(x)-f(x_0)>0\big)$$

arba

$$(\forall x_0\in]a;b[)(\forall x\in]a;b[)\ \big(x<x_0\Rightarrow f(x)-f(x_0)<0\big).$$

Vadinasi,

$$(\forall x_0\in]a;b[)(\forall x\in]a;b[)\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0.$$

Kadangi f yra diferencijuojama intervale $]a;b[$, tai, paskutinėje nelygybėje perėję prie ribos, kai $x\to x_0$, gausime

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0.$$

Taigi teorema įrodyta.

2 apibrėžimas. Funkcija $f(x)$, $x\in]a;b[$, vadinama *nemažėjančia* intervale $]a;b[$, jeigu bet kuriems x_1 ir x_2, $x_1<x_2$, priklausantiems intervalui $]a;b[$, yra teisinga nelygybė $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.

Nemažėjanti funkcija tenkina teoremą, analogišką 1 teoremai.

3 apibrėžimas. Funkcija $f(x)$, $x\in]a;b[$, vadinama *mažėjančia* intervale $]a;b[$, jeigu bet kuriems x_1 ir x_2, $x_1<x_2$, priklausantiems intervalui $]a;b[$, yra teisinga nelygybė $f(x_1)>f(x_2)$. Trumpiau, funkcija $f(x)$, $x\in]a;b[$, vadinama *mažėjančia* intervale $]a;b[$, jeigu ji tenkina sąlygą

$$(\forall x_1\in]a;b[)(\forall x_2\in]a;b[)\ \big(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\big).$$

Įrodysime funkcijos mažėjimo atvirame intervale būtiną sąlygą.

2 teorema. *Jeigu diferencijuojama funkcija* $f(x)$, $x\in]a;b[$, *mažėja intervale* $]a;b[$, *tai* $f'(x_0)\leqslant 0$ *bet kuriam* x_0 *iš intervalo* $]a;b[$. ***Trumpiau,*** *mažėjanti ir diferencijuojama intervale* $]a;b[$ *funkcija* f *tenkina sąlygą*

$$(\forall x_0\in]a;b[)\ f'(x_0)\leqslant 0.$$

Įrodymas. Kadangi funkcija $f(x)$ mažėja, tai funkcija $F(x)=-f(x)$ didėja, todėl, remiantis 1 teorema, $F'(x_0)=-f'(x_0)\geqslant 0$ bet kuriam $x_0\in]a;b[$. Iš čia išplaukia, kad $f'(x_0)\leqslant 0$ bet kuriems $x_0\in]a;b[$.

2 teorema įrodyta.

4 apibrėžimas. Funkcija $f(x)$, $x\in]a;b[$, vadinama *nedidėjančia* intervale $]a;b[$, jeigu bet kuriems x_1 ir x_2, $x_1<x_2$, priklausantiems intervalui $]a;b[$, yra teisinga nelygybė $f(x_1)\geqslant f(x_2)$. Apie nedidėjančią funkciją galime suformuluoti teoremą, analogišką 2 teoremai.

Didėjanti, nedidėjanti, mažėjanti ir nemažėjanti funkcijos vadinamos *monotoninėmis funkcijomis*, o didėjanti ir mažėjanti funkcijos dar vadinamos *griežtai monotoninėmis funkcijomis*.

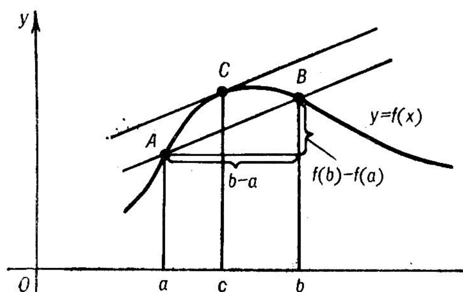
Funkcijoms, apibrėžtoms kokiame nors intervale, taip pat įvedama monotoniškumo sąvoka. Pavyzdžiui, funkcija $f(x)$, $x \in I$, vadinama *didėjančia intervale I*, jeigu bet kuriems x_1 ir x_2, $x_1 < x_2$, priklausantiems intervalui I, yra teisinga nelygybė $f(x_1) < f(x_2)$. Jeigu visiems x_1 ir x_2 iš nurodyto intervalo yra teisinga nelygybė $f(x_1) > f(x_2)$, tai funkcija f vadinama *mažėjančia intervale I*. Monotoninėms intervale funkcijoms yra teisingos teoremos, analogiškos 1 ir 2 teoremoms.

Dabar nagrinėsime pakankamas funkcijų didėjimo ir mažėjimo sąlygas. Įrodinėjant teoremas apie pakankamas funkcijos monotoniškumo sąlygas, remiamasi viena iš pagrindinių diferencialinio skaičiavimo teoremų – Lagranžo teorema.

Sakykime, funkcija $f(x)$, $x \in [a; b]$, *yra tolydi atkarpoje* $[a; b]$ *ir diferencijuojama intervale* $]a; b[$. *Tada egzistuoja toks taškas* $c \in]a; b[$, *kad yra teisinga formulė*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \qquad (1)$$

(1) formulė yra vadinama Lagranžo formule. Lagranžo teoremos neįrodinėsime, tik paaiškinsime jos geometrinę prasmę (žr. 78 pav.). Funkcijos f grafike imsime taškus $A\,(a; f(a))$ ir $B\,(b; f(b))$. Lengva pastebėti, kad



78 pav.

kirstinės AB, išvestos per taškus A ir B, krypties koeficientas yra $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (1) formulę užrašysime šitaip:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Prisiminus geometrinę išvestinės prasmę, galima sakyti, kad (2) formulė, taigi ir (1) formulė reiškia štai ką: intervale $]a; b[$ egzistuoja toks taškas c, kad funkcijos f grafiko liestinė taške C, kurio abscisė c, turi tokį pat krypties koeficientą, kaip ir kirstinė AB, t.y. egzistuoja duotosios funkcijos grafiko liestinė, lygiagreti kirstinei AB.

3 teorema (pakankama funkcijos didėjimo sąlyga). *Jeigu funkcija f kiekviename intervalo* $]a; b[$ *taške turi teigiamą išvestinę, tai funkcija didėja tame intervale.*

Trumpiau, diferencijuojama intervale $]a;\ b[$ *funkcija* f *didėja intervale* $]a;\ b[$, *jeigu išpildoma sąlyga*

$$(\forall x \in]a;\ b[)\ f'(x) > 0.$$

Įrodymas. Sakykime, x_1 ir x_2 yra bet kokie du intervalo $]a;\ b[$ taškai, tenkinantys sąlygą $x_1 < x_2$. Tada, remiantis Lagranžo teorema, egzistuoja toks taškas $c \in]x_1;\ x_2[$, kad

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Kadangi, remiantis teoremos sąlyga, $f'(x) > 0$ ir $x_2 - x_1 > 0$, tai paskutinė formulė rodo, kad $f(x_2) > f(x_1)$. Taigi

$$(\forall x_1 \in]a;\ b[)(\forall x_2 \in]a;\ b[)\ \big(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)\big).$$

Remiantis didėjančios funkcijos 1 apibrėžimu, pastarasis sąryšis reiškia, kad funkcija f didėja intervale $]a;\ b[$. 3 teorema įrodyta.

Analogiškai įrodoma ir ši teorema.

4 teorema (pakankama funkcijos mažėjimo sąlyga). *Jeigu funkcija* f *kiekviename intervalo* $]a;\ b[$ *taške turi neigiamą išvestinę, tai ji mažėja tame intervale. Trumpiau, diferencijuojama intervale* $]a;\ b[$ *funkcija* f *mažėja tame intervale, jeigu išpildoma sąlyga*

$$(\forall x \in]a;\ b[)\ f'(x) < 0.$$

Funkcijos monotoniškumo intervalais vadinami atvirieji intervalai, kuriuose funkcija yra monotoninė.

1 pastaba. Pastebėsime, kad funkcija f yra monotoninė intervale $[a;\ b]$ (arba intervale $[a;\ b[$, arba intervale $]a;\ b]$), jeigu ji yra monotoninė intervale $]a;\ b[$ ir tolydi taškuose a ir b (arba taške a, arba taške b). To teiginio neįrodinėsime.

1 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$$

monotoniškumo intervalus.

Sprendimas. Ši funkcija yra apibrėžta ir diferencijuojama visoje skaičių tiesėje.

Randame jos išvestinę: $f'(x) = 2(x^2 - 1)$. Kadangi $(\forall x \in]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[)\ f'(x) > 0$, tai, remiantis 3 teorema, duotoji funkcija didėja intervaluose $]-\infty;\ -1[$ ir $]1;\ +\infty[$. Kadangi $(\forall x \in]-1;\ 1[)\ f'(x) < 0$, tai, remiantis 4 teorema, duotoji funkcija mažėja intervale $]-1;\ 1[$.

2 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x) = 3x + \frac{3}{x} + 5$$

monotoniškumo intervalus.

Sprendimas. Funkcijos apibrėžimo sritis yra visa skaičių tiesė, išskyrus tašką $x=0$, t.y. intervalai $]-\infty; 0[$ ir $]0; +\infty[$. Rasime išvestinę

$$f'(x)=3-\frac{3}{x^2}=3\,\frac{x^2-1}{x^2}.$$

Išvestinė yra trupmena, kurios ženklas priklauso nuo skaitiklio ženklo, nes vardiklis yra teigiamas. Taigi $f'(x)<0$ visiems x iš intervalų $]-1; 0[$ ir $]0; 1[$; vadinasi, remiantis 4 teorema, intervaluose $]-1; 0[$ ir $]0; 1[$ duotoji funkcija mažėja. Kadangi $f'(x)>0$ visiems x iš intervalų $]-\infty; -1[$ ir $]1; +\infty[$, tai, remiantis 3 teorema, funkcija $f(x)$ tuose intervaluose didėja. Taigi funkcija $f(x)$ didėja intervaluose $]-\infty; -1[$ ir $]1; +\infty[$, mažėja intervaluose $]-1; 0[$ ir $]0; 1[$.

2 pastaba. 3 ir 4 teoremose yra suformuluotos pakankamos funkcijos monotoniškumo sąlygos, kurios nėra būtinos. Pavyzdžiui, sakykime, $f(x)=x^3$, $x\in]-\infty; +\infty[$. Tada $f'(x)=3x^2$, $x\in]-\infty; +\infty[$; iš čia išplaukia, kad $f'(x)>0$ visiems $x\in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, o taške $x=0$: $f'(0)=0$.

Dabar įrodysime, kad $f(x)=x^3$ yra visoje skaičių tiesėje didėjanti funkcija. Nagrinėsime skirtumą $f(x)-f(x_0)=x^3-x_0^3=(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)$. Iš paskutinės lygybės

$$(\forall x_0\in]-\infty; \infty[)(\forall x\in]-\infty; \infty[)\,\big(x_0<x\Rightarrow f(x_0)<f(x)\big).$$

Tai ir reiškia, kad $f(x)=x^3$ didėja visoje skaičių tiesėje, nors jos išvestinė taške $x=0$ lygi 0.

2. Monotoniškumo intervalų radimo taisyklė. Dabar suformuluosime funkcijos monotoniškumo intervalų radimo taisyklę.

1. Apskaičiuojame funkcijos $f(x)$ išvestinę $f'(x)$, po to randame taškus, kuriuose $f'(x)$ yra lygi nuliui arba neegzistuoja. Tie taškai vadinami *kritiniais* funkcijos $f(x)$ taškais.

2. Kritiniai taškai funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį suskaido į atviruosius intervalus, kiekviename iš kurių išvestinė $f'(x)$ yra pastovaus ženklo. Tie atvirieji intervalai ir yra monotoniškumo intervalai.

3. Nustatome $f'(x)$ ženklą kiekviename rastame atvirajame intervale. Jeigu $f'(x)>0$, tai tame intervale $f(x)$ didėja; jeigu $f'(x)<0$, tai tokiame intervale $f(x)$ mažėja.

Pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x)=x\ln x+3x$$

monotoniškumo intervalus.

Sprendimas. 1. Duotoji funkcija yra apibrėžta ir turi išvestinę visuose intervalo $]0; +\infty[$ taškuose. Randame išvestinę: $f'(x)=1+\ln x+3=$ $=4+\ln x$. Iš lygties

$$f'(x)=4+\ln x=0$$

išplaukia, kad $x=e^{-4}$ yra vienintelis kritinis taškas.

2. Kadangi $x=e^{-4}$ yra kritinis taškas, tai $]0; e^{-4}[$ ir $]e^{-4}; +\infty[$ yra monotoniškumo intervalai.

3. Nustatysime $f'(x)$ ženklą kiekviename iš tų intervalų, spręsdami nelygybes $\ln x+4<0$ ir $\ln x+4>0$.

Kadangi

$$(\forall x\in]0;e^{-4}[)\ f'(x)<0,$$

tai intervale $]0;e^{-4}[$ duotoji funkcija mažėja.

Kadangi

$$(\forall x\in]e^{-4};+\infty[)\ f'(x)>0,$$

tai intervale $]e^{-4};+\infty[$ duotoji funkcija didėja.

Pratimas

1. Nustatykite monotoniškumo intervalus šių funkcijų:

a) $f(x)=5x-2$; b) $f(x)=4-9x$; c) $f(x)=\frac{1}{3x}$;

d) $f(x)=\frac{4}{5-x}$; e) $f(x)=x^2+x-1$; f) $f(x)=(x+1)^3$;

g) $f(x)=7x^2+14x+1$; h) $f(x)=3x^4-6x^2+4$; i) $f(x)=x(x^2-3)$;

j) $f(x)=x^3(1-x)$; k) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$; l) $f(x)=\frac{x^3}{1-x}$.

§ 22. FUNKCIJOS EKSTREMUMŲ TYRIMAS

1. Apie funkcijos ekstremumo sąvoką.

1 apibrėžimas. Funkcijos f apibrėžimo srities taškas x_0 vadinamas tos funkcijos *minimumo tašku*, jeigu egzistuoja tokia taško x_0 δ-aplinka $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$, kad visiems $x\neq x_0$ iš δ-aplinkos yra teisinga nelygybė $f(x)>f(x_0)$.

2 apibrėžimas. Funkcijos f apibrėžimo srities taškas x_0 vadinamas tos funkcijos *maksimumo tašku*, jeigu egzistuoja tokia taško x_0 δ-aplinka $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$, kad visiems $x\neq x_0$ iš δ-aplinkos yra teisinga nelygybė $f(x)<f(x_0)$.

Funkcijos f maksimumo ir minimumo taškai vadinami tos funkcijos *ekstremumo taškais*, o funkcijos $f(x)$ reikšmės maksimumo ir minimumo taškuose vadinamos funkcijos *maksimumu* ir *minimumu*, arba *funkcijos ekstremumais*.

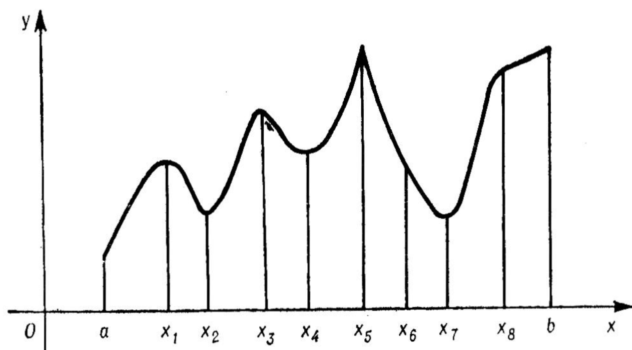
Nagrinėsime funkciją $f(x)$, apibrėžtą atkarpoje $[a;\ b]$ (79 pav.).

Taškai x_1, x_3 ir x_5 yra maksimumo taškai, x_2, x_4 ir x_7 – minimumo taškai. Iš duotosios funkcijos grafiko matyti, kad jos minimumas taške $x=x_4$ yra didesnis už maksimumą taške $x=x_1$. Tai neprieštarauja funkcijos ekstremumų apibrėžimams, nes tuose apibrėžimuose funkcijos reikšmė tiriamame taške yra lyginama su jos reikšmėmis kokioje nors to taško aplinkoje.

Taigi ekstremumo sąvoka visada yra susijusi su tam tikra duotojo funkcijos apibrėžimo srities taško aplinka (tam tikra vieta), bet ne su visa

sritimi. Todėl kartais tai sąvokai yra vartojamas terminas *lokalinis ekstremumas*, t.y. su tam tikra vieta susijęs ekstremumas.

Pastaba. Taškai a ir b (žr. 79 pav.) nėra funkcijos f ekstremumų taškai, nes jie nėra vidiniai[1] duotosios funkcijos apibrėžimo srities taškai, todėl neturi δ-aplinkos, priklausančios tos funkcijos apibrėžimo sričiai.



79 pav.

2. Ekstremumo egzistavimo sąlygos. Iš pradžių nagrinėsime būtiną ekstremumo egzistavimo sąlygą.

Ferma teorema. *Jeigu taškas x_0 yra funkcijos $y=f(x)$, apibrėžtos kokioje nors taško x_0 aplinkoje, ekstremumo taškas ir tame taške egzistuoja išvestinė $f'(x)$, tai ji yra lygi nuliui:* $f'(x_0)=0$.

Įrodymas. Kad būtų konkrečiau, sakysime, jog ekstremumo taškas x_0 yra maksimumo taškas. Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad egzistuoja tokia taško x_0 δ-aplinka, jog visiems $x \neq x_0$ iš δ-aplinkos yra teisinga nelygybė $f(x)<f(x_0)$. Remiantis teoremos sąlyga, funkcija f taške x_0 turi išvestinę. Tai rodo (žr. § 15, 5 skirsnį), kad yra teisinga lygybė

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0). \tag{1}$$

Dabar rasime kairiąją ir dešiniąją duotosios funkcijos išvestines taške x_0:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0, \tag{2}$$

nes $x-x_0<0$ ir $f(x)-f(x_0)<0$ visiems $x \in]x_0-\delta;\ x_0[$;

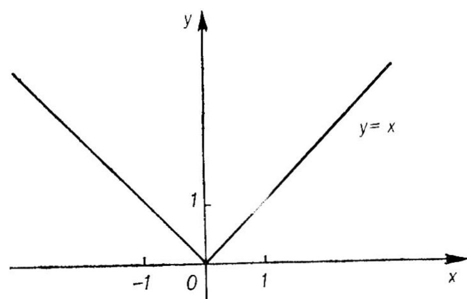
$$f'_+(x_0)=\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0, \tag{3}$$

nes $x-x_0>0$ ir $f(x)-f(x_0)<0$ visiems $x \in]x_0;\ x_0+\delta[$.

Palyginę (2) ir (3) sąryšius ir atsižvelgę į (1) lygybę, gausime $f'(x_0)=0$. Panašiai teorema įrodoma ir tada, kai x_0 yra minimumo taškas.

[1]Aibės *vidiniu tašku* yra vadinamas taškas, priklausantis tai aibei kartu su kokia nors savo aplinka.

Pastaba. Ferma teorema nurodo tik būtiną ekstremumo egzistavimo sąlygą. Ja remiantis, galima tik išskirti taškus, kuriuose funkcija gali turėti ekstremumą. Tai reiškia, kad ne kiekvienas kritinis taškas yra ekstreminis. Pavyzdžiui, funkcija $f(x)=x^3$ taške $x=0$ turi lygią nuliui išvestinę, bet $x=0$ nėra tos funkcijos ekstreminis taškas (žr. 1 skirsnį). Kitą tokio



80 pav.

taško pavyzdį matome funkcijos grafike, pavaizduotame 79 paveiksle. Tai taškas, kurio abscisė $x=x_8$; tame taške funkcija taip pat didėja.

Nagrinėjome kritinius taškus, kuriuose išvestinė yra lygi nuliui; tie taškai kartais vadinami *stacionariaisiais*. Dabar nagrinėsime taškus, kuriuose išvestinė neegzistuoja.

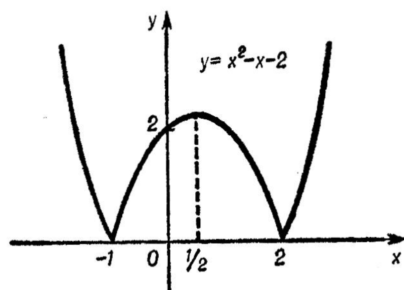
1 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=|x|$ (80 pav.). 15 paragrafo 5 skirsnyje buvo nustatyta, kad ši funkcija taške $x=0$ išvestinės neturi. Vadinasi, taškas $x=0$ yra kritinis taškas. Kadangi $f(x)>0$ visiems $x\neq 0$, o $f(0)=0$, tai $f(x)>f(0)$ visiems $x\neq 0$. Paskutinė nelygybė reiškia, kad, remiantis 1 apibrėžimu, taškas $x=0$ yra funkcijos $f(x)=|x|$ minimumo taškas.

2 pavyzdys. Sakykime, duota funkcija $y=|x^2-x-2|$. 15 paragrafo 5 skirsnyje buvo įrodyta, kad taškuose $x=-1$ ir $x=2$ ta funkcija išvestinės neturi. Tai reiškia, kad taškai $x=-1$ ir $x=2$ yra funkcijos kritiniai taškai. Kadangi $f(x)>0$ visiems $x\neq -1$ ir $x\neq 2$, o $f(-1)=0$, $f(2)=0$, tai, paėmus, pavyzdžiui, $0<\delta<1$, visiems $x\neq -1$ iš intervalo $]-1-\delta;\ -1+\delta[$ bus $f(x)>f(-1)$, o visiems $x\neq 2$ iš intervalo $]2-\delta;\ 2+\delta[$ taip pat bus $f(x)>f(2)$. Remiantis 1 apibrėžimu, taškai $x=-1$ ir $x=2$ yra funkcijos $f(x)=|x^2-x-2|$ minimumo taškai (81 pav.).

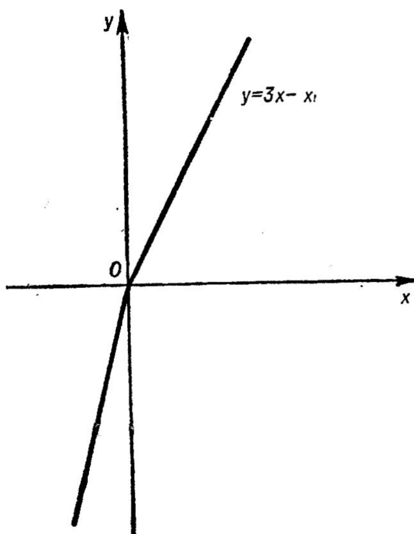
3 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=3x-|x|$ (82 pav.). Taške $x=0$ ta funkcija išvestinės neturi, t.y. $x=0$ yra kritinis duotosios funkcijos taškas. Kadangi $f(x)<f(0)$ visiems $x<0$ ir $f(x)>f(0)$ visiems $x>0$, tai taške $x=0$ duotoji funkcija neturi ekstremumo.

Dabar nagrinėsime pakankamas ekstremumo egzistavimo sąlygas. Vartosime šitokius terminus: sakysime, kad kokia nors funkcija $\varphi(x)$ keičia ženklą iš pliuso į minusą, kai x praeina pro tašką x_0, jeigu egzistuoja tokia taško x_0 δ-aplinka $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$, kad į kairę nuo taško x_0, t.y. visiems $x\in]x_0-\delta;\ x_0[$ funkcija $\varphi(x)>0$, o į dešinę nuo to taško, t.y. visiems $x\in]x_0;\ x_0+\delta[$ funkcija $\varphi(x)<0$. Analogiškus terminus vartotume ir kalbėdami apie ženklo keitimą iš minuso į pliusą, x praeinant pro tašką x_0.

1 teorema (pakankama ekstremumo egzistavimo sąlyga). *Sakykime, funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0 ir turi išvestinę jo δ-aplinkoje, išskyrus galbūt patį tašką x_0.*



81 pav.



82 pav.

Tada

a) *jeigu išvestinė $f'(x)$, kai x praeina pro tašką x_0, keičia ženklą iš pliuso į minusą, tai taškas x_0 yra funkcijos $f(x)$ maksimumo taškas;*

b) *jeigu išvestinė $f'(x)$, kai x praeina pro tašką x_0, keičia ženklą iš minuso į pliusą, tai taškas x_0 yra tos funkcijos $f(x)$ minimumo taškas;*

c) *jeigu egzistuoja taško x_0 aplinka $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$, kurioje išvestinė $f'(x)$ yra pastovaus ženklo, tai taške x_0 funkcija $f(x)$ neturi ekstremumo.*

Įrodymas. Sakykime, išvestinė $f'(x)$, kai x praeina pro tašką x_0, keičia ženklą iš pliuso į minusą. Tai reiškia, kad egzistuoja toks skaičius $\delta>0$, kad $f'(x)>0$ visiems x iš intervalo $]x_0-\delta;\ x_0[$ ir $f'(x)<0$ visiems x iš intervalo $]x_0;\ x_0+\delta[$. Kadangi $f'(x)>0$ visiems $x\in]x_0-\delta;\ x_0[$, tai, remiantis 21 paragrafo 1 skirsnio 3 teorema, funkcija $f(x)$ didėja intervale $]x_0-\delta;\ x_0[$. Vadinasi, remiantis didėjančios funkcijos apibrėžimu, $f(x)<f(x_0)$ visiems x iš intervalo $]x_0-\delta;\ x_0[$. Kadangi $f'(x)<0$ visiems $x\in]x_0;\ x_0+\delta[$, tai, remiantis 21 paragrafo 1 skirsnio 4 teorema, funkcija $f(x)$ mažėja intervale $]x_0;\ x_0+\delta[$. Todėl $f(x)<f(x_0)$ visiems x iš intervalo $]x_0;\ x_0+\delta[$. Taigi gavome, kad $f(x)<f(x_0)$ visiems $x\neq x_0$ iš intervalo $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$, t.y. taškas x_0, remiantis 2 apibrėžimu, yra funkcijos $f(x)$ maksimumo taškas.

Atvejai b ir c įrodomi analogiškai.

3. Funkcijos ekstremumų radimo taisyklės.

1 taisyklė. Sakykime, $f(x)$ yra apibrėžta ir tolydi kokiame nors intervale $]a;\ b[$, turi išvestinę visame intervale $]a;\ b[$, išskyrus galbūt baigti-

nį taškų skaičių, ir turi ne daugiau kaip baigtinį stacionariųjų taškų skaičių. Tada, norint rasti funkcijos ekstremumus, reikia:

1) rasti kritinius funkcijos $f(x)$ taškus, t.y. taškus, kuriuose $f'(x)=0$ arba $f'(x)$ neegzistuoja;

2) nustatyti išvestinės $f'(x)$ ženklą kokioje nors kiekvieno kritinio taško δ-aplinkoje. Jeigu $f'(x)$, kai x praeina pro tokį tašką, keičia ženklą, tai funkcija $f(x)$ tame taške turi ekstremumą. Būtent, jeigu ženklas keičiasi iš minuso į pliusą, tai tame taške yra minimumas, o jeigu iš pliuso į minusą, tai tame taške yra maksimumas. Jeigu išvestinės $f'(x)$ ženklas nesikeičia, x praeinant pro nagrinėjamąjį tašką, tai funkcija $f(x)$ tame taške ekstremumo neturi.

Pavyzdžiui, funkcija $f(x)$, kurios grafikas pavaizduotas 79 paveiksle, taškuose, kurių abscisės x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ir x_7 turi ekstremumus: taškuose, kurių abscisės x_1, x_3 ir x_5, – maksimumus, o taškuose, kurių abscisės x_2, x_4 ir x_7, – minimumus; taškuose, kurių abscisės x_6 ir x_8, funkcija ekstremumų neturi.

Išnagrinėsime kelis pavyzdžius anksčiau suformuluotai taisyklei įtvirtinti.

1 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-3)$. Ta funkcija yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje.

1) Apskaičiuosime duotosios funkcijos išvestinę:

$$f'(x)=\frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Rasime kritinius funkcijos $f(x)$ taškus:

a) jeigu $f'(x)=0$, tai $x=\frac{6}{5}$;

b) $f'(x)$ neegzistuoja taške $x=0$.

Taigi kritiniai taškai yra $x_1=0$ ir $x_2=\frac{6}{5}$.

2) Nustatysime $f'(x)$ ženklą kokioje nors kiekvieno kritinio taško aplinkoje. Tyrimo rezultatus surašysime į lentelę:

x	$-\infty<x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{6}{5}$	$x=\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}<x<+\infty$
$f'(x)$	+	neegzistuoja	–	0	+
Ekstremumo taškai		maksimumas		minimumas	
Ekstremumo reikšmės		$f(0)=0$		$f\left(\frac{6}{5}\right)\approx-2{,}03$	

2 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=|x|$.

Ši funkcija yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje ir turi išvestinę

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ -1, & x<0, \end{cases} \qquad (*)$$

visoje skaičių tiesėje, išskyrus tašką $x=0$.

Duotoji funkcija turi vieną kritinį tašką $x=0$. Akivaizdu (žr. 80 pav.), kad taškas $x=0$ yra tos funkcijos minimumo taškas.

Dabar suformuluosime pakankamas ekstremumo egzistavimo sąlygas, remdamiesi antros eilės išvestinės reikšmėmis.

Teorema. *Jeigu funkcija $f(x)$, apibrėžta kokioje nors taško x_0 aplinkoje, turi pirmąją ir antrąją išvestines ir $f'(x)=0$, o $f''(x_0)\neq 0$, tai taške x_0 funkcija $f(x)$ turi ekstremumą: maksimumą, kai $f''(x_0)<0$, ir minimumą, kai $f''(x_0)>0$.*

Ši teorema įrodoma analogiškai kaip 2 skirsnio 1 teorema.

Dabar rasime funkcijos ekstremumą, remdamiesi suformuluotąja teorema.

Pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+7$$

ekstremumus.

Sprendimas. 1. Radę $f'(x)=x^2-5x+6$, po to išsprendę lygtį $f'(x)=0$, matysime, kad $x_1=2$ ir $x_2=3$ yra stacionarieji duotosios funkcijos taškai.

2. Rasime $f''(x)$: $f''(x)=2x-5$. Apskaičiuosime $f''(x)$ reikšmes stacionariuosiuose taškuose: $f''(2)=2\cdot 2-5=-1$, t.y. $f''(2)=-1<0$, $f''(3)=2\cdot 3-5=1$, t.y. $f''(3)=1>0$. Remiantis suformuluotąja teorema, $x=2$ yra maksimumo taškas, o $x=3$ – duotosios funkcijos minimumo taškas. Taigi $f_{\min}=f(3)=11\frac{1}{2}$ ir $f_{\max}=f(2)=11\frac{2}{3}$.

Pastaba. Jeigu taške x_0 pirmoji ir antroji funkcijos $f(x)$ išvestinės yra lygios nuliui, tai iš nagrinėtosios teoremos atsakymas neišplaukia. Norint nustatyti, ar tai yra funkcijos ekstremumas, reikia remtis pirmąja taisykle (žr. p. 178). Pavyzdžiui, sakykime $f(x)=x^4+3$. Tada

$$f'(x)=4x^3, \quad f''(x)=12x^2,$$

taigi $f'(0)=f''(0)=0$. Tuo atveju būtina remtis pirmąja taisykle (žr. p. 178): kadangi $f'(x)<0$, kai $x<0$, ir $f'(x)>0$, kai $x>0$, tai $x=0$ yra duotosios funkcijos minimumo taškas:

$$f_{\min}=f(0)=3.$$

2 taisyklė. Norint rasti funkcijos $f(x)$ ekstremumus, reikia:

1) rasti stacionariuosius taškus x_i, $i=1, 2, \ldots, n$;

2) apskaičiuoti antrąją išvestinę kiekviename stacionariajame taške x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, jeigu antroji išvestinė yra teigiama, tai tas taškas – duotosios funkcijos minimumo taškas; jeigu antroji išvestinė yra neigiama,

tai tas taškas – maksimumo taškas; jeigu antroji išvestinė yra lygi nuliui, tai, norint nustatyti, ar tai yra ekstremumas, būtina remtis pirmąja taisykle.

Pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-2x^2+5$$

ekstremumus.

Sprendimas. 1. Apskaičiuojame pirmąją išvestinę

$$f'(x)=x^3-4x=x(x^2-4).$$

2. Randame stacionariuosius taškus:

$$(x(x^2-4)=0)\Leftrightarrow(x=0 \vee (x^2-4)=0)\Leftrightarrow(x=0 \vee x=2 \vee x=-2).$$

Taigi $x_1=-2$, $x_2=0$ ir $x_3=2$ yra stacionarieji duotosios funkcijos taškai.

3. Randame antrąją išvestinę: $f''(x)=3x^2-4$.

4. Apskaičiuojame antrosios išvestinės reikšmes stacionariuosiuose taškuose:

$$f''(-2)=3\cdot(-2)^2-4=8>0,$$

$$f''(0)=3\cdot 0^2-4=-4<0,$$

$$f''(2)=3\cdot(2)^2-4=8>0.$$

5. Vadinasi, duotoji funkcija turi:

a) minimumą taške $x=-2$, nes $f''(-2)>0$, ir

$$f_{\min}=f(-2)=\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2+5=1;$$

b) maksimumą taške $x=0$, nes $f''(0)<0$, ir

$$f_{\max}=f(0)=5;$$

c) minimumą taške $x=2$, nes $f''(2)>0$, ir

$$f_{\min}=f(2)=1.$$

Pratimas

Raskite ekstremumus šių funkcijų:

a) $f(x)=1+4x-x^2$; b) $f(x)=3+x^2-6x$;

c) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+5$; d) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^4+5$;

e) $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$; f) $f(x)=\sqrt{x}$;

g) $f(x)=\sqrt[5]{x}$; h) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$; i) $f(x)=x^2e^{-x}$;

j) $f(x)=e^x+e^{-x}$; k) $f(x)=x\ln x$; l) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

§ 23. KVADRATINĖS FUNKCIJOS TYRIMAS

Funkcija $f(x)=ax^2+bx+c$, $x\in R$ ir $a\neq 0$, yra vadinama *kvadratine*, o polinomas ax^2+bx+c, $a\neq 0$, dažnai vadinamas *kvadratiniu trinariu*. Kvadratinė funkcija yra apibrėžta ir tolydi visoje skaičių tiesėje, t.y. kiekvienam $x\in R$. Tos funkcijos išvestinė $f'(x)=2ax+b$ egzistuoja kiekvienam $x\in R$ ir yra lygi nuliui vieninteliame taške

$$x_0=-\frac{b}{2a}. \tag{1}$$

Apskaičiuojame funkcijos f reikšmę taške x_0:

$$f(x_0)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}+b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=$$
$$=-\frac{b^2}{4a}+c=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{D}{4a};$$

čia $D=b^2-4ac$ – kvadratinio trinario diskriminantas. Funkcijos reikšmę $f(x_0)$ pažymėkime y_0. Priminsime, kad pagal diskriminanto D ženklą nustatomas realiųjų kvadratinio trinario ax^2+bx+c šaknų skaičius ir egzistavimas:

a) jeigu $D>0$, tai trinaris turi dvi realiąsias šaknis

$$x_1=-\frac{b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{ir} \quad x_2=-\frac{b+\sqrt{D}}{2a};$$

b) jeigu $D=0$, tai trinaris turi vieną realiąją šaknį

$$x_0=-\frac{b}{2a};$$

c) jeigu $D<0$, tai trinaris realiųjų šaknų neturi, t.y. nėra realiojo skaičiaus, kuris būtų kvadratinio trinario šaknis.

Rasime kvadratinės funkcijos monotoniškumo intervalus ir jos ekstremumus, remdamiesi išvestine:

a) jeigu $a>0$, tai $f'(x)<0$, kai $x<x_0$, ir $f'(x)>0$, kai $x>x_0$. Vadinasi, funkcija f mažėja intervale $]-\infty; x_0[$ ir didėja intervale $]x_0; +\infty[$. Kadangi $f'(x_0)=0$ ir išvestinė f', kai x praeina pro tašką x_0, keičia ženklą iš minuso į pliusą, tai funkcija f taške x_0 turi minimumą, t.y.

$$f_{\min}=f(x_0)=y_0;$$

b) jeigu $a<0$, tai $f'(x)>0$, kai $x<x_0$, ir $f'(x)<0$, kai $x>x_0$. Todėl kvadratinė funkcija f didėja intervale $]-\infty; x_0[$ ir mažėja intervale $]x_0; +\infty[$. Kadangi $f'(x_0)=0$ ir išvestinė f', kai x praeina pro tašką x_0, keičia ženklą iš pliuso į minusą, tai funkcija f taške x_0 turi maksimumą, t.y.

$$f_{\max}=f(x_0)=y_0.$$

Atsižvelgiant į diskriminanto D ženklą, kiekvieną nagrinėtąjį atvejį galima suskaidyti dar į tris atvejus. Kvadratinės funkcijos grafikai kiekvienu iš 6 atvejų pavaizduoti 83 paveiksle.

1 pavyzdys. Nubraižykime funkcijos

$$f(x)=x^2-4x-5.$$

grafiką.

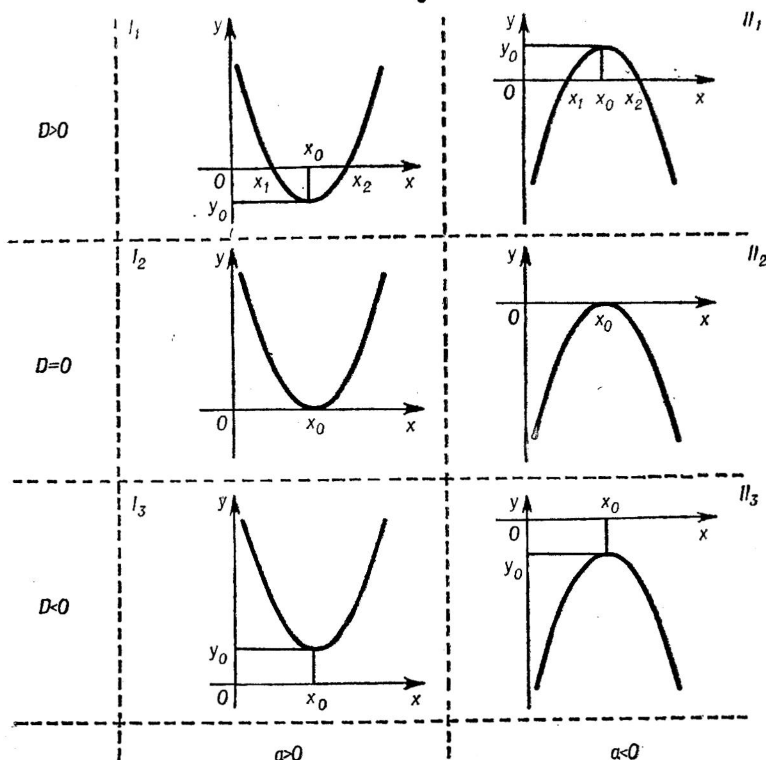
Sprendimas. Braižydami grafiką, remsimės gautaisiais kvadratinės funkcijos tyrimo rezultatais. Kadangi šiuo atveju $a=1>0$ ir $D=b^2-4ac=$ $=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=36>0$, tai turime I_1 atvejį. Rasime parabolės, kuri yra duotosios funkcijos grafikas, viršūnės koordinates:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\cdot1}=2$$

ir

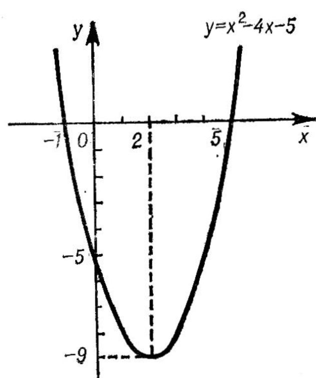
$$y_0=f(x_0)=f(2)=2^2-4\cdot2-5=-9.$$

Taigi duotoji funkcija taške $x_0=2$ turi minimumą, t.y. $f_{min}=f(2)=-9$. Išsprendę lygtį $x^2-4x-5=0$, rasime funkcijos grafiko ir Ox ašies susikirtimo taškų abscises: $x_1=-1$ ir $x_2=5$.

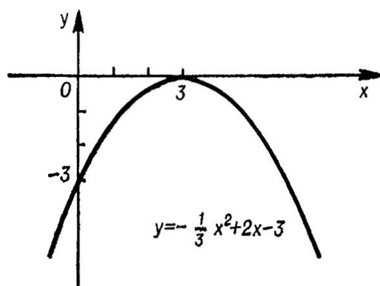


83 pav.

Apskaičiuosime funkcijos reikšmę taške $x=0$: $f(0)=-5$. Vadinasi, parabolė kerta Oy ašį taške (0; -5). Duotosios funkcijos grafikas pavaizduotas 84 paveiksle.



84 pav.



85 pav.

2 pavyzdys. Nubraižykime funkcijos

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-3$$

grafiką.

Sprendimas. Kadangi $a=-\frac{1}{3}<0$ ir $D=b^2-4ac=2^2-4\left(-\frac{1}{3}\right)\times$ $\times(-3)=4-4=0$, tai turime II_2 atvejį. Paėmę $x=0$, gausime $f(0)=-3$, taigi funkcijos grafikas kerta Oy ašį taške (0; -3). Rasime parabolės viršūnės koordinates:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=3$$

ir

$$f(3)=0.$$

Nagrinėjamosios funkcijos grafikas pavaizduotas 85 paveiksle.

3 pavyzdys. Nubraižykime funkcijos

$$f(x)=-3x^2+2x-1$$

grafiką.

Sprendimas. Šiuo atveju

$$a=-3<0$$

ir

$$D=b^2-4ac=2^2-4(-3)(-1)=-8<0,$$

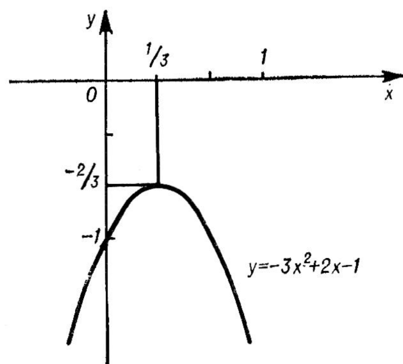
todėl turime II_3 atvejį. Paėmę $x=0$, gausime $f(0)=-1$, taigi grafikas kerta Oy ašį taške $(0;\ -1)$. Dabar rasime parabolės viršūnės koordinates:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot(-3)}=\frac{1}{3}$$

ir

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-3\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\cdot\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}.$$

Duotosios funkcijos grafikas pavaizduotas 86 paveiksle.



86 pav.

P r a t i m a s

Ištirkite kvadratines funkcijas ir nubraižykite jų grafikus:

a) $f(x)=x^2+2x-3$; b) $f(x)=4x^2-6x-7$;

c) $f(x)=3+4x-x^2$; d) $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+x-1$;

e) $f(x)=-4x^2+2x-1$; f) $f(x)=-\frac{1}{5}x^2+2x-5$;

g) $f(x)=x^2+x-2$; h) $f(x)=x^2-2x+3$.

§ 24. ANTROJO LAIPSNIO NELYGYBIŲ SPRENDIMAS

Kvadratinės funkcijos tyrimo rezultatai, gauti ankstesniame paragrafe, yra pritaikomi, sprendžiant antrojo laipsnio nelygybes.

Sakykime, reikia išspręsti nelygybę

$$ax^2+bx+c>0,\quad a\neq 0. \tag{1}$$

a) Jeigu diskriminantas $D<0$, tai, kaip žinoma, funkcijos $f(x)=ax^2+$ $+bx+c$ grafikas nekerta abscisių ašies (žr. p. 183, 83 pav., I_3 ir II_3 atvejus). Būtent jis yra virš abscisių ašies, kai $a>0$, ir žemiau tos ašies, kai $a<0$.

Taigi, jeigu $D<0$ ir $a>0$, tai (1) nelygybės sprendinių aibė yra visų realiųjų skaičių aibė R; jeigu $D<0$ ir $a<0$, tai tos nelygybės sprendinių aibė yra tuščioji aibė $\varnothing$.

b) Jeigu diskriminantas $D>0$ (žr. p. 183, 83 pav., I_1 ir II_1 atvejus), tai, kaip žinoma, funkcijos $f(x)=ax^2+bx+c$ grafikas kerta Ox ašį taškuose x_1 ir x_2 (apibrėžtumo dėlei sakysime, kad $x_1<x_2$), kurie yra lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknys, t.y. visuose intervalo $]x_1; x_2[$ taškuose funkcija f lieka to paties ženklo, priešingo koeficiento a ženklui; intervaluose $]-\infty; x_1[$ ir $]x_2; +\infty[$ funkcija f taip pat lieka pastovaus ženklo, sutampančio su koeficiento a ženklu.

Vadinasi, jeigu $D>0$ ir $a>0$, tai (1) nelygybės sprendinių aibė yra $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$; jeigu $D>0$ ir $a<0$, tai (1) nelygybės sprendinių aibė yra intervalas $]x_1; x_2[$.

c) Jeigu diskriminantas $D=0$ (žr. p. 183, 83 pav., I_2 ir II_2 atvejus), tai funkcijos grafikas liečia Ox ašį taške x_0, kuriame $f(x_0)=0$. Vadinasi, funkcija intervaluose $]-\infty; x_0[$ ir $]x_0; +\infty[$ lieka pastovaus ženklo, sutampančio su koeficiento a ženklu. Taigi (1) nelygybės sprendinių aibė yra aibė $]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$, kai $D=0$ ir $a>0$; jeigu $D=0$ ir $a<0$, tai (1) nelygybės sprendinių aibė yra tuščioji aibė $\varnothing$.

Pastaba. Vietoj nelygybės

$$ax^2+bx+c<0 \qquad (2)$$

sprendžiama (1) pavidalo nelygybė. Iš tikrųjų, padauginę abi (2) nelygybės puses iš skaičiaus (-1), gausime

$$-ax^2-bx-c>0.$$

Pažymėję $a_1=-a$, $b_1=-b$ ir $c_1=-c$, gausime

$$a_1x^2+b_1x+c_1>0.$$

Tai ir reikėjo įrodyti.

Išspręsti nelygybę

$$ax^2+bx+c\geqslant 0 \qquad (3)$$

— reiškia išspręsti nelygybę $ax^2+bx+c>0$ ir lygtį $ax^2+bx+c=0$. Taigi (3) nelygybės sprendinių aibė yra nelygybės $ax^2+bx+c>0$ ir lygties $ax^2+bx+c=0$ sprendinių aibių sąjunga.

Analogiškai sprendžiama ir nelygybė $ax^2+bx+c\leqslant 0$.

1 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$x^2-2x+3>0.$$

Sprendimas. Apskaičiuosime diskriminantą D: $D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 3=-8<0$. Kadangi $D<0$ ir $a=1>0$, tai duotosios nelygybės sprendinių aibė yra realiųjų skaičių aibė $R=]-\infty; +\infty[$.

2 pavyzdys. Išspręskime nelygybę $x^2-2x-3>0$.

Sprendimas. Apskaičiuosime diskriminantą D:

$$D=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16>0.$$

Rasime kvadratinio trinario šaknis

$$(x^2-2x-3=0) \Leftrightarrow \left(x_1=\frac{2-\sqrt{16}}{2}=-1,\quad x_2=\frac{2+\sqrt{16}}{2}=3\right).$$

Kadangi $D>0$ ir $a=1>0$, tai duotosios nelygybės sprendinių aibė yra intervalų $]-\infty;\ -1[$ ir $]3;\ +\infty[$ sąjunga, t.y. tos nelygybės sprendinys yra bet kuris realusis skaičius $x\in]-\infty;\ -1[\cup]3;\ +\infty[$.

3 pavyzdys. Išspręskime nelygybę

$$x^2-4x\leqslant 5.$$

Sprendimas. Padauginę abi nelygybės puses iš (-1), gausime $-x^2+$ $+4x\geqslant -5$. Vadinasi,

$$(-x^2+4x\geqslant -5) \Leftrightarrow (-x^2+4x+5\geqslant 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((-x^2+4x+5>0)\vee(-x^2+4x+5=0)).$$

Iš pradžių išspręsime lygtį

$$(-x^2+4x+5=0) \Leftrightarrow \left(x_1=\frac{-4+\sqrt{36}}{-2}=-1,\quad x_2=\frac{-4-\sqrt{36}}{-2}=5\right).$$

Kadangi kvadratinio trinario $-x^2+4x+5$ diskriminantas $D=36>0$, to trinario šaknys $x_1=-1$, $x_2=5$ ir $a=-1<0$, tai nelygybės $-x^2+4x+$ $+5>0$ sprendinys yra intervalas $]-1;\ 5[$.

Nelygybės $x^2-4x\leqslant 5$ sprendinių aibė yra nelygybės $-x^2+4x+5>0$ ir lygties $-x^2+4x+5=0$ sprendinių aibių sąjunga, t.y. atkarpa $[-1;\ 5]$.

Pratimas

1. Išspręskite šias nelygybes:

a) $x^2-2x+3\leqslant 0$; b) $x^2-2x-3\leqslant 0$; c) $x^2-4x-5>0$;

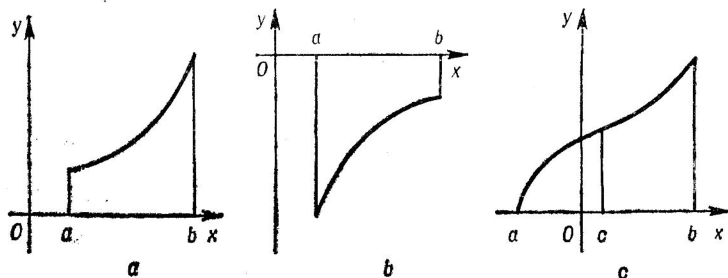
d) $x^2-3x+8>0$; e) $-x^2+6x-10<0$; f) $-x^2+4x-4\geqslant 0$;

g) $\frac{1}{2}x^2-4x+6\leqslant 0$; h) $-\frac{1}{2}x^2+2x-3\geqslant 0$.

§ 25. FUNKCIJOS GRAFIKO IŠKILUMAS

1. Apie funkcijos grafiko iškilumo sąvoką. Norint nubraižyti funkcijos grafiką, paprastai reikia išsiaiškinti to grafiko iškilumus (aukštyn arba žemyn) atskirose funkcijos apibrėžimo srities dalyse. Iš tikrųjų, pavyzdžiui, 87 paveiksle pavaizduoti grafikai funkcijų, kiekviena iš kurių yra didėjanti atkarpoje $[a;\ b]$, bet gerai matyti tų grafikų skirtumas: 87 pav., *a*, funkcijos grafikas yra iškilas žemyn; 87 pav., *b*, – iškilas aukštyn; 87 pav., *c*, intervale $]a;\ c[\subset[a;\ b]$ funkcijos grafikas yra iškilas aukštyn, o intervale $]c;\ b[\subset[a;\ b]$ – iškilas žemyn. Geometriniu požiūriu terminų „iškilas žemyn“ ir

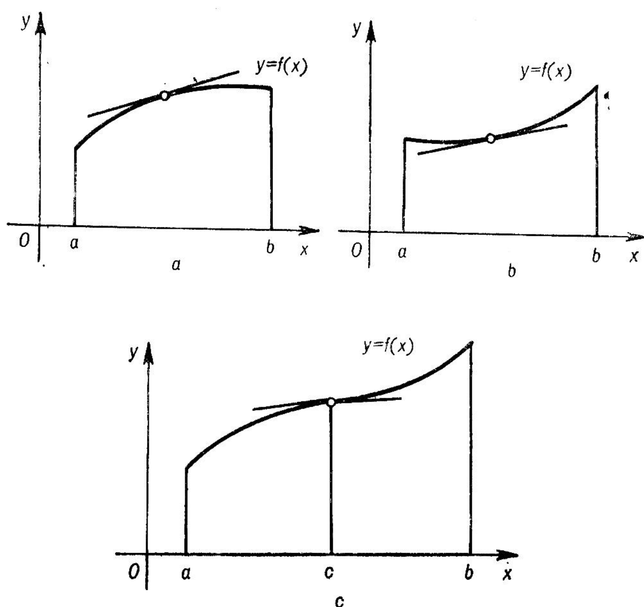
„iškilas aukštyn“ prasmė yra visiškai aiški. Dabar apibrėšime tų terminų tikslią matematinę prasmę ir nurodysime kriterijų, kuriuo remiantis galima nustatyti, į kurią pusę yra iškilas funkcijos grafikas.



87 pav.

1 apibrėžimas. Sakoma, kad tolydžiai diferencijuojamos funkcijos $f(x)$, $x \in]a; b[$, grafikas intervale $]a; b[$ yra *iškilas aukštyn*, kai f' mažėja intervale $]a; b[$.

Nesunku pastebėti, kad tuo atveju kiekviename funkcijos $f(x)$, $x \in]a; b[$, grafiko taške egzistuoja liestinė, kuri yra virš funkcijos grafiko (žr. 88 pav., *a*), nes liestinės krypties koeficientas mažėja, kai x didėja.



88 pav.

2 apibrėžimas. Sakoma, kad tolydžiai diferencijuojamos funkcijos $f(x)$, $x \in]a; b[$, grafikas intervale $]a; b[$ yra *iškilas žemyn*, kai f' didėja intervale $]a; b[$.

Šiuo atveju kiekviename funkcijos $f(x)$, $x \in]a; b[$, grafiko taške egzistuoja liestinė, kuri yra žemiau funkcijos grafiko (žr. 88 pav., *b*), nes liestinės krypties koeficientas didėja, kai x didėja.

2. Pakankamos funkcijos grafiko iškilumo sąlygos.

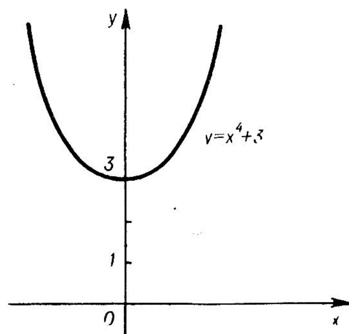
Teorema. *Sakykime, funkcija $f(x)$, $x \in]a; b[$, turi pirmąją ir antrąją išvestines. Jeigu $f''(x) < 0$ visiems $x \in]a; b[$, tai funkcijos f grafikas intervale $]a; b[$ yra iškilas aukštyn; jeigu $f''(x) > 0$ visiems $x \in]a; b[$, tai funkcijos f grafikas tame intervale $]a; b[$ yra iškilas žemyn.*

Įrodymas. Jeigu $f''(x) < 0$ visiems $x \in]a; b[$, tai, remiantis 21 paragrafo 1 skirsnio 4 teorema, funkcija f' mažėja intervale $]a; b[$. Taigi, remiantis 1 apibrėžimu, funkcijos f grafikas intervale $]a; b[$ yra iškilas aukštyn.

Jeigu $f''(x) > 0$ visiems $x \in]a; b[$, tai, remiantis 21 paragrafo 1 skirsnio 3 teorema, funkcija f' didėja intervale $]a; b[$. Taigi, remiantis 2 apibrėžimu, funkcijos f grafikas intervale $]a; b[$ yra iškilas žemyn.

Teorema įrodyta.

Pastaba. Pastovus antrosios išvestinės ženklas – pakankama funkcijos grafiko iškilumo (aukštyn arba žemyn) sąlyga, bet ji nėra būtina. Pavyzdžiui, funkcijos $f(x) = x^4 + 3$ grafikas visoje skaičių tiesėje yra iškilas žemyn, bet jos antroji išvestinė $f''(x) = 12x^2$ lygi nuliui taške $x = 0$ (89 pav.).



89 pav.

Apibrėžimas. *Funkcijos grafiko iškilumo intervalais* vadinami atvirieji intervalai, kuriuose grafikas yra iškilas aukštyn arba žemyn.

Dabar suformuluosime funkcijos grafiko *iškilumo intervalų nustatymo taisyklę.*

Sakykime, funkcija $y = f(x)$, $x \in]a; b[$, intervale $]a; b[$ turi išvestines iki antros eilės imtinai, išskyrus galbūt baigtinį taškų skaičių, ir $f''(x)$ turi ne daugiau kaip baigtinį nulių skaičių tame intervale.

Tada, norint rasti funkcijos $f(x)$ grafiko iškilumo intervalus, reikia:

1) rasti funkcijos $y = f(x)$ kritinius taškus (remiantis antrąja išvestine), priklausančius intervalui $]a; b[$, t.y. taškus, kuriuose arba $f''(x) = 0$, arba $f''(x)$ neegzistuoja;

2) nustatyti $f''(x)$ ženklą kiekviename iš intervalų, į kuriuos intervalą $]a; b[$ suskaido rastieji funkcijos $y = f(x)$ kritiniai taškai.

Jeigu nagrinėjamame atvirajame intervale $f''(x)>0$, tai tame intervale funkcijos $y=f(x)$ grafikas yra iškilas žemyn; jeigu $f''(x)<0$, tai tame intervale funkcijos $y=f(x)$ grafikas yra iškilas aukštyn.

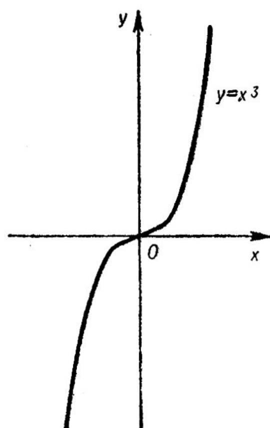
1 pavyzdys. Sakykime, $f(x)=x^3$. Ši funkcija yra tolydi visoje skaičių tiesėje ir turi joje išvestines iki antros eilės imtinai:

$$f'(x)=3x^2 \quad \text{ir} \quad f''(x)=6x.$$

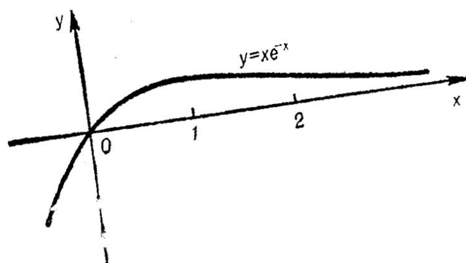
1) Rasime (pagal antrąją išvestinę) funkcijos $y=f(x)$ kritinius taškus, t. y. taškus, kuriuose $f''(x)=0$.

Duotoji funkcija, kaip rodo antroji išvestinė, turi vieną kritinį tašką $x=0$. Tas taškas skaičių tiesę (funkcijos apibrėžimo sritį) suskaido į du intervalus $]-\infty; 0[$ ir $]0; +\infty[$.

2) Kadangi $f''(x)>0$ visiems $x\in]0; +\infty[$, tai funkcijos $f(x)=x^3$ grafikas intervale $]0; +\infty[$ yra iškilas žemyn; kadangi $f''(x)<0$ visiems $x\in]-\infty; 0[$, tai funkcijos $f(x)=x^3$ grafikas intervale $]-\infty; 0[$ yra iškilas aukštyn (90 pav.).



90 pav.



91 pav.

2 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=xe^{-x}$ iškilumo intervalus.

1) Ši funkcija visoje skaičių tiesėje turi pirmąją ir antrąją išvestines $f'(x)=e^{-x}(1-x)$ ir $f''(x)=e^{-x}(x-2)$. Rasime pagal antrąją išvestinę kritinius funkcijos $y=f(x)$ taškus.

$$\left[\left(f''(x)=0\right)\wedge\left(f''(x)=e^{-x}(x-2)\right)\right]\Leftrightarrow(x=2).$$

Taškas $x=2$ intervalą $]-\infty; +\infty[$ suskaido į du intervalus $]-\infty; 2[$ ir $]2; +\infty[$.

2) Kadangi $f''(x)<0$ visiems $x<2$, tai duotosios funkcijos grafikas yra iškilas aukštyn intervale $]-\infty; 2[$; kadangi $f''(x)>0$ visiems $x>2$, tai grafikas yra iškilas žemyn intervale $]2; +\infty[$ (91 pav.).

1. Raskite atviruosius intervalus, kuriuose funkcijos grafikas yra iškilas žemyn ir aukštyn, kai

a) $f(x)=x^3-6x^2+12+4$; b) $f(x)=(x+1)^4$;

c) $f(x)=x^4-6x^2+4$; d) $f(x)=x^4+8x^2+16$.

3. Vingio taškai. Funkcijų $f(x)=x^3$ ir $f(x)=xe^{-x}$ grafikai, išnagrinėti pirmesniame skirsnyje, pasižymėjo tuo, kad taškai, kurių abscisės $x=0$ ir $x=2$, kirto funkcijos grafiko iškilumo intervalus. Tokie funkcijos grafiko taškai vadinami *vingio taškais.*

Apibrėžimas. *Funkcijos f grafiko vingio tašku* vadinamas taškas, skiriantis tos funkcijos iškilumo intervalus.

Akivaizdu, kad grafiko kreivės liestinė vienoje vingio taško pusėje turi būti virš funkcijos grafiko, o kitoje vingio taško pusėje – žemiau funkcijos grafiko, t.y. liestinė turi kirsti kreivę tame taške (žr. 88 pav., *c*).

Suformuluosime funkcijos grafiko vingio taškų egzistavimo sąlygas.

1 teorema (būtina sąlyga). *Sakykime, funkcija $f(x)$ yra apibrėžta ir turi tolydžias išvestines iki antros eilės imtinai intervale $]a; b[$. Jeigu taškas $(x_0; f(x_0))$, $x_0\in]a; b[$, yra funkcijos $y=f(x)$ grafiko vingio taškas, tai $f''(x_0)=0$.*

Įrodymas. Įrodinėsime prieštaravimo būdu. Sakykime, $f''(x_0)<0$ (arba $f''(x_0)>0$). Remiantis antrosios išvestinės tolydumu, egzistuoja tokia taško x_0 δ-aplinka, kad $f''(x)<0$ (arba $f''(x_0)>0$) visiems x iš tos aplinkos, įskaitant ir tašką x_0, t.y. $(\forall x\in]x_0-\delta; x_0+\delta[)\ f''(x)<0$ arba $(\forall x\in]x_0-\delta; x_0+\delta[)\ f''(x)>0$. Remiantis šio paragrafo 2 skirsnio teorema, kreivė $y=f(x)$ intervale $]x_0-\delta; x_0+\delta[$ bus iškila aukštyn (žemyn). Tačiau gautoji išvada prieštarauja tam, kad taškas x_0 yra vingio taškas. Vadinasi, $f''(x_0)=0$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Pastaba. Visi funkcijos ekstremumo taškai, kaip žinome, randami tarp tos funkcijos kritinių taškų, remiantis pirmąja išvestine; panašiai ir visi nagrinėjamos klasės funkcijos vingio taškai randami tarp jos kritinių taškų, remiantis antrąja išvestine.

2 teorema (pakankama sąlyga). *Jeigu funkcija $f(x)$, $x\in]a; b[$, turi pirmos ir antros eilės išvestines intervale $]a; b[$ ir jos antros eilės išvestinė keičia ženklą, argumentui praeinant pro tašką $x_0\in]a; b[$, tai x_0 yra funkcijos $y=f(x)$, $x\in]a; b[$, grafiko vingio taško abscisė.*

Įrodymas. Sakykime, kai x praeina pro tašką x_0, $f''(x)$ keičia ženklą iš minuso į pliusą. Tada, remiantis 2 skirsnio teorema, vienoje taško x_0 pusėje funkcijos $y=f(x)$ grafikas yra iškilas aukštyn, o kitoje to taško pusėje – iškilas žemyn. Remiantis vingio taško apibrėžimu, iš pastarosios išvados išplaukia, kad taškas $(x_0; f(x_0))$ yra funkcijos $f(x)$ grafiko vingio taškas. Analogiškai įrodoma, kad taškas $(x_0; f(x_0))$ yra funkcijos

$$y=f(x)$$

grafiko vingio taškas ir tada, kai, x praeinant pro tašką x_0, $f''(x)$ keičia ženklą iš pliuso į minusą.

Dabar suformuluosime funkcijos grafiko vingio taškų radimo taisyklę.

Sakykime, funkcija $y=f(x)$ yra apibrėžta intervale $]a; b[$, tame intervale turi tolydžias išvestines iki antros eilės imtinai ir $f''(x)$ turi ne daugiau kaip baigtinį nulių skaičių intervale $]a; b[$. Tada, norint rasti funkcijos $y=f(x)$, $x\in]a; b[$, grafiko vingio taškus, reikia:

1) rasti kritinius funkcijos $y=f(x)$, $x\in]a; b[$, taškus, priklausančius intervalui $]a; b[$;

2) nustatyti antrosios išvestinės $f''(x)$ ženklą kokioje nors kiekvieno kritinio taško x_0 aplinkoje (reikia imti tokią aplinką, kad jai nepriklausytų kiti kritiniai taškai). Jeigu, argumentui praeinant pro tokį tašką x_0, $f''(x)$ ženklas keičiasi, tai taškas $(x_0; f(x_0))$ yra funkcijos $y=f(x), x\in]a; b[$, grafiko vingio taškas.

Pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=x^4-2x^3+1$ grafiko vingio taškus.

Sprendimas. Funkcija $f(x)$ yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje.

1. Apskaičiuosime išvestines:

$$f'(x)=4x^3-6x^2,$$

$$f''(x)=12x(x-1).$$

Kritinius funkcijos $y=f(x)$ taškus rasime (remdamiesi antrąja išvestine) iš lygties

$$f''(x)=0, \quad \text{t. y.} \quad 12x(x-1)=0.$$

Taigi $x_1=0$ ir $x_2=1$ yra kritiniai duotosios funkcijos taškai.

2. Dabar nustatysime $f''(x)$ ženklą taškų $x_1=0$ ir $x_2=1$ aplinkoje Jeigu $x\in]-\delta; 0[$, tai $f''(x)>0$; jeigu $x\in]0; \delta[$, tai $f''(x)<0$. Taigi $(x_1; f(x_1))=(0; 1)$ yra vingio taškas.

Jeigu $x\in]1-\delta; 1[$, tai $f''(x)<0$; jeigu $x\in]1; 1+\delta[$, tai $f''(x)>0$.

Taigi $(x_2; f(x_2))=(1; 0)$ yra vingio taškas.

§ 26. FUNKCIJŲ GRAFIKŲ BRAIŽYMAS

Aštuonmetėje mokykloje taikomas funkcijos grafiko braižymo metodas, sujungiant taškus, nėra tobulas. Žymiai lengviau braižyti funkcijos grafiką, ištyrus išvestines.

Funkcijų grafikus galima braižyti pagal šitokią schemą:

1) rasti funkcijos $y=f(x)$ apibrėžimo sritį, jeigu ji nenurodyta iš anksto;

2) patikrinti, ar funkcija yra lyginė, ar nelyginė;

3) nustatyti, ar funkcija yra periodinė;

4) rasti funkcijos grafiko ir koordinačių ašių susikirtimo taškus;

5) rasti funkcijos kritinius taškus, kuriuose $f(x)=0$ arba kurie yra funkcijos trūkio taškai, nustatyti funkcijos ženklą atviruosiuose intervaluose, į kuriuos suskaido funkcijos apibrėžimo sritį jos kritiniai taškai, t.y. rasti atviruosius intervalus, kuriuose funkcijos $y=f(x)$ ženklas yra pastovus;

6) rasti funkcijos grafiko asimptotes;

7) rasti funkcijos monotoniškumo intervalus;

8) rasti funkcijos ekstremumo taškus;

9) rasti grafiko vingio taškus ir iškilumo intervalus;

10) nubraižyti grafiką.

Atkreipsime dėmesį, kad, braižant funkcijos grafiką, ne visada reikia griežtai laikytis tos schemos. Pavyzdžiui, 2 punktą tam tikra prasme nusako 1 punktas; 9 punktas ne visada reikalingas. Kartais, norint nubraižyti funkcijos grafiką, pakanka išpildyti 1—6 punktų nurodymus.

1 pavyzdys. Nubraižykime funkcijos

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$$

grafiką.

Sprendimas. 1) Funkcijos apibrėžimo sritis yra visa skaičių tiesė, išskyrus taškus $x=1$ ir $x=-1$.

2) $f(x)$ yra nelyginė funkcija, nes $f(-x)=-f(x)$. Todėl pakanka nubraižyti funkcijos grafiką, kai $x \geqslant 0$.

3) Funkcija yra neperiodinė.

4) Rasime funkcijos nulius:

$$\left(\frac{x^3}{x^2-1}=0\right) \Leftrightarrow (x=0).$$

Toliau rasime susikirtimo taškus su ordinačių ašimi: paėmę $x=0$, gausime $f(0)=0$. Taigi funkcijos grafikas eina per koordinačių pradžią.

5) Remdamiesi 1, 4 tyrimo žingsnių rezultatais, rasime funkcijos kritinius taškus

$$x_1=-1, \quad x_2=0, \quad x_3=+1.$$

Tie taškai $x_1=-1$, $x_2=0$ ir $x_3=1$ skaičių tiesę dalija į keturis intervalus:

$$]-\infty;\ -1[,\quad]-1;\ 0[,\quad]0;\ +1[\ \text{ ir }\ ]+1;\ +\infty[.$$

Kadangi $f(x)$ yra nelyginė, tai funkcijos ženklą nustatysime tik intervaluose $]0;\ 1[$ ir $]1;+\infty[$:

x	$0<x<1$	$1<x<+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$

Kadangi duotosios funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu (nes $f(x)$ yra nelyginė funkcija), tai intervaluose $]-\infty;\ -1[$ ir $]-1;\ 0[$ funkcijos ženklas bus atitinkamai $-$ ir $+$.

6) Kadangi

$$\lim_{x\to+1\pm0} f(x)=\pm\infty \quad \text{ir} \quad \lim_{x\to-1\pm0} f(x)=\pm\infty,$$

tai tiesės

$$x=1 \text{ ir } x=-1$$

yra vertikalios asimptotės.

Apskaičiavę

$$\lim_{x\to\pm 1}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm 1}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=+1,$$

gauname $k=1$.

Apskaičiavę

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-1}-x\right]=0,$$

gauname $b=0$. Taigi duotosios funkcijos grafikas turi pasvirusią asimptotę, ir tos asimptotės lygtis yra $y=x$.

7, 8) Rasime išvestinę:

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2};$$

ji egzistuoja visuose skaičių tiesės taškuose, išskyrus $x=\pm 1$. Todėl funkcijos $y=f(x)$ kritiniai taškai yra

$$x_1=-\sqrt{3},\quad x_2=-1,\quad x_3=0,\quad x_4=1,\quad x_5=\sqrt{3}.$$

Nustatysime $f'(x)$ ženklą kritinio taško aplinkoje. Kadangi $f(x)$ yra nelyginė, tai pakanka $f'(x)$ ženklą nustatyti tik intervaluose $]-1;0[$, $]0;1[$, $]1;\sqrt{3}[$ ir $]\sqrt{3};+\infty[$. Gautus rezultatus surašysime į lentelę.

x	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$1<x<\sqrt{3}$	$x=\sqrt{3}$	$\sqrt{3}<x<+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$
Monotoniškumo intervalai, ekstremumo taškai	mažėja	ekstremumo nėra	mažėja	mažėja	minimumas	didėja
Ekstremumo reikšmė					$f(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$	

Taškuose $x=-1$ ir $x=1$ funkcija ekstremumo neturi, nes tie taškai nepriklauso funkcijos apibrėžimo sričiai.

Kadangi duotoji funkcija yra nelyginė, tai galime tvirtinti, kad ji turi maksimumą taške $x=-\sqrt{3}$.

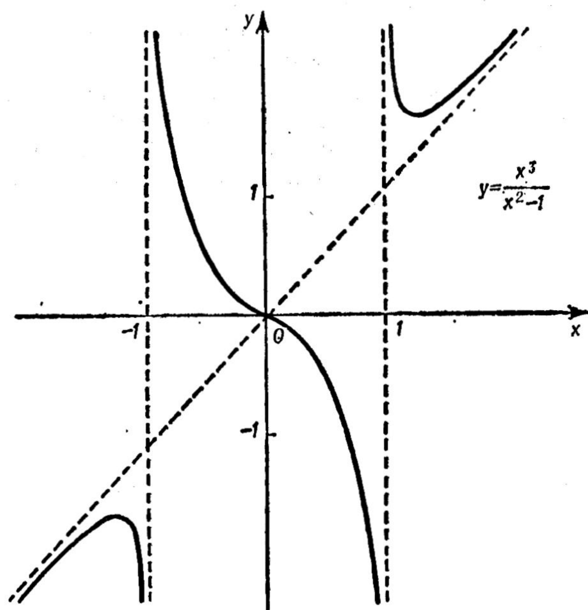
9) Norėdami nustatyti funkcijos grafiko iškilumo intervalus, rasime antrąją išvestinę:

$$f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Rasime kritinius tos funkcijos taškus (remdamiesi antrąja išvestine):

a) $\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0, \quad x_1=0$;

b) $f''(x)$ neegzistuoja, kai $x_{2,3}=\pm 1$. Tačiau taškai $x=\pm 1$ nepriklauso funkcijos apibrėžimo sričiai, todėl vingio taškas gali būti tik taškas, kurio abscisė $x=0$.



29 pav.

Ištirsime antrosios išvestinės ženklą ir tyrimo rezultatus surašysime į lentelę:

x	$-\infty<x<-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<+1$	$1<x<+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
Iškilumo intervalai ir vingio taškas	iškilumas aukštyn	iškilumas žemyn	vingio taškas	iškilumas aukštyn	iškilumas žemyn

10) Remdamiesi gautais funkcijos tyrimo rezultatais, nubraižysime grafiką (žr. 92 pav.).

2 pavyzdys. Nubraižykime funkcijos $f(x)=5\,\frac{x-2}{x^2}$ grafiką.

Sprendimas. 1) Funkcijos apibrėžimo sritis yra visa skaičių ašis, išskyrus tašką $x=0$, t.y. $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė, nes $f(-x) \neq f(x)$ ir $f(-x) \neq -f(x)$.

3) Funkcija neperiodinė.

4) Rasime funkcijos nulius: $f(x)=0$. Išsprendę lygtį $\frac{5(x-2)}{x^2}=0$, gauname $x=2$. Taigi funkcijos grafikas kerta abscisių ašį taške $x=2$. Kadangi $x=0$ nepriklauso funkcijos apibrėžimo sričiai, tai galime tvirtinti, kad funkcijos grafikas ordinačių ašies nekerta.

5) Remdamiesi 1 ir 4 tyrimo etapais, rasime kritinius funkcijos taškus ir nustatysime atviruosius intervalus, kuriuose funkcijos ženklas yra pastovus: $x_1=0$ ir $x_2=2$ – kritiniai funkcijos taškai; skaičių ašį jie dalija į tris intervalus $]-\infty; 0[$, $]0; 2[$ ir $]2; +\infty[$, kuriuose funkcijos reikšmės yra pastovaus ženklo (žr. 1 lentelę).

1 lentelė

x	$-\infty<x<0$	$0<x<2$	$2<x<+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

6) Rasime funkcijos grafiko asimptotes. Kadangi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5(x-2)}{x^2} = 0,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5(x-2)}{x^3} = 0,$$

tai tiesė $y=0$, t.y. abscisių ašis, yra horizontalioji asimptotė. Kadangi

$$\lim_{x \to \pm 0} f(x) = \lim_{x \to \pm 0} \frac{5(x-2)}{x^2} = \infty,$$

tai tiesė $x=0$, t.y. ordinačių ašis, yra vertikalioji asimptotė.

7, 8) Rasime išvestinę

$$f'(x) = \frac{5(4-x)}{x^3};$$

ji egzistuoja ir yra baigtinė duotosios funkcijos apibrėžimo srityje. Todėl funkcijos $f(x)$ kritiniai taškai (ištyrus pirmąją išvestinę) yra $x_1=0$ ir $x_2=4$.

Nustatysime, kuriuose iš intervalų $]-\infty; 0[$, $]0; 4[$ ir $]4; +\infty[$ funkcija didėja, o kuriuose mažėja. Tyrimo rezultatai surašyti 2 lentelėje.

2 lentelė

x	$-\infty<x<0$	$0<x<4$	$x=4$	$4<x<+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$
Monotoniškumo intervalai, ekstremumo taškai	mažėja	didėja	maksimumas	mažėja
Ekstremumo reikšmė			$f(4)\approx 0{,}6$	

Taškas $x=0$ nėra funkcijos ekstremumo taškas, nes nepriklauso jos apibrėžimo sričiai.

9) Norėdami nustatyti funkcijos grafiko iškilumo intervalus ir vingio taškus, rasime antrąją išvestinę

$$f''(x)=\frac{10(x-6)}{x^4}.$$

Išaiškinsime duotosios funkcijos kritinius taškus (tirdami antrąją išvestinę):

a) $\frac{10(x-6)}{x^4}=0, \quad x=6;$

b) $f''(x)$ neegzistuoja taške $x=0$.

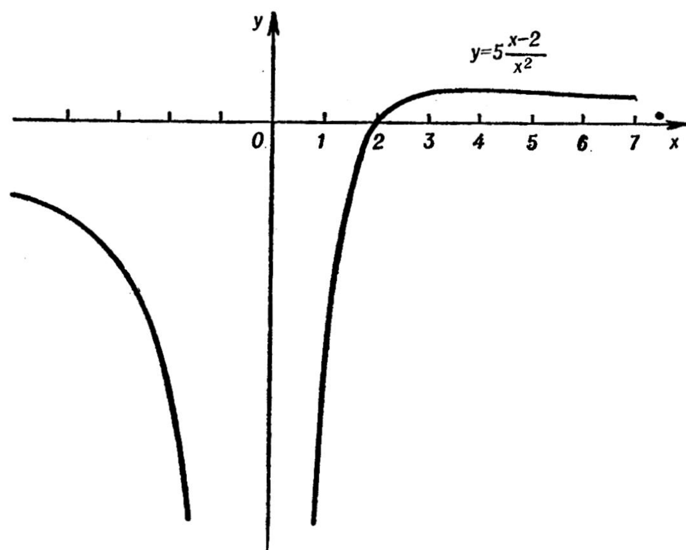
Kadangi taškas $x=0$ nepriklauso duotosios funkcijos apibrėžimo sričiai, tai negali būti grafiko vingio taškas; todėl vingio taškas gali būti tik taškas, kurio abscisė $x=6$. Nustatysime antrosios išvestinės ženklą ir tyrimo rezultatus surašysime į 3 lentelę.

3 lentelė

x	$-\infty<x<0$	$0<x<6$	$x=6$	$6<x<+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
Iškilumo intervalai ir vingio taškai	iškilumas aukštyn	iškilumas aukštyn	vingio taškas	iškilumas žemyn

10) Remdamiesi gautais funkcijos tyrimo rezultatais, nubraižome tos funkcijos grafiką (žr. 93 pav.).

Pastaba. Kartais vietoj 1, 2 ir 3 lentelių funkcijos savybių tyrimo rezultatai surašomi vienoje lentelėje. Ženklai ↗ ir ↘ reiškia, kad funkcija atitinkamai didėja ir mažėja, o ženklai ∩ ir ∪ reiškia, kad funkcijos grafikas yra iškilas atitinkamai aukštyn ir žemyn.



93 pav.

Pavyzdžiui, ką tik išnagrinėtosios funkcijos savybių tyrimo rezultatų lentelė bus šitokia:

x	$-\infty<x<$ <0	$0<x<$ <2	$2<x<4$	$x=4$	$4<x<$ <6	$x=6$	$6<x<+\infty$
$f(x)$	−	−	+	+	+	+	+
$f'(x)$	−	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	−	−	0	+
Monotoniškumo intervalai ir ekstremumo taškai	↘	↗	↗	maksimumas $f(4)\approx 0{,}6$	↘		↘
Iškilumo intervalai ir vingio taškai	∩	∩	∩		∩	vingio taškas	∪

Naudojantis ta lentele, ir braižomas funkcijos grafikas.

Pratimas

1. Ištirkite šias funkcijas ir nubraižykite jų grafikus:

a) $f(x)=x^3-3x^2-x+3$; b) $f(x)=x^4-10x^2+9$;

c) $f(x)=-x^4+2x^2+3$; d) $f(x)=\dfrac{x-1}{(2x+1)(2-x)}$;

e) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$; f) $f(x)=\dfrac{(x+1)(2-x)}{2x-3}$;

g) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x}$; h) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$;

i) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$; j) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$; k) $f(x)=x\ln x$.

§ 27. MAKSIMUMO IR MINIMUMO UŽDAVINIŲ SPRENDIMAS

1. Didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmės. Praktikoje dažnai tenka ieškoti mažiausios ir didžiausios iš visų reikšmių, kurias funkcija įgyja kokioje nors atkarpoje. Jeigu žinoma, kad atkarpoje $[a; b]$ funkcija $f(x)$ yra monotoninė, tai didžiausią ir mažiausią reikšmes ji įgyja atkarpos galuose, būtent; jeigu $f(x)$ yra didėjanti, tai $f(a)$ – mažiausia funkcijos $f(x)$ reikšmė, o $f(b)$ – didžiausia reikšmė; jeigu $f(x)$ yra mažėjanti funkcija, tai $f(a)$ – didžiausia funkcijos reikšmė, $f(b)$ – mažiausia reikšmė. Pavyzdžiui, sakykime, $f(x)=x^2$, kai $x\in[0; 1]$. Duotoji funkcija yra tolydi ir didėjanti duotoje atkarpoje. Taigi $f(0)=0$ yra mažiausia tos funkcijos reikšmė, o $f(1)=1$ – didžiausia reikšmė (94 pav.).

Sakykime, $f(x)$ nėra monotoninė atkarpoje $[a; b]$, bet žinoma, kad yra tolydi atkarpoje $[a; b]$, turi išvestinę visuose atkarpos $[a; b]$ taškuose, išskyrus galbūt baigtinį jų skaičių, ir turi ne daugiau kaip baigtinį stacionariųjų taškų skaičių. Tada didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmės toje atkarpoje priklauso aibei reikšmių, kurias funkcija įgyja kritiniuose taškuose, priklausančiuose intervalui $]a; b[$, ir atkarpos $[a; b]$ galuose. Taigi, ieškant šio tipo funkcijos $y=f(x)$, $x\in[a; b]$, didžiausios ir mažiausios reikšmės, reikia rasti baigtinės aibės, sudarytos iš funkcijos reikšmių $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, kur x_i – kritiniai duotosios funkcijos taškai, didžiausią ir mažiausią elementus.

Pavyzdžiui, funkcijos $f(x)$, kurios grafikas pavaizduotas 79 paveiksle, didžiausia reikšmė yra taške $x=x_5$ ir mažiausia – taške $x=a$.

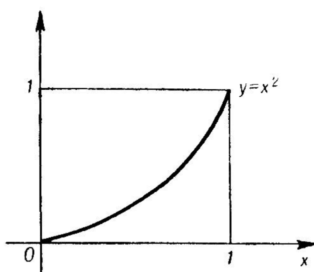
1 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=x^{2/3}(x-2)$ (95 pav.) didžiausią ir mažiausią reikšmes atkarpose:

a) $[-8; -1]$ ir b) $[-1; 1]$.

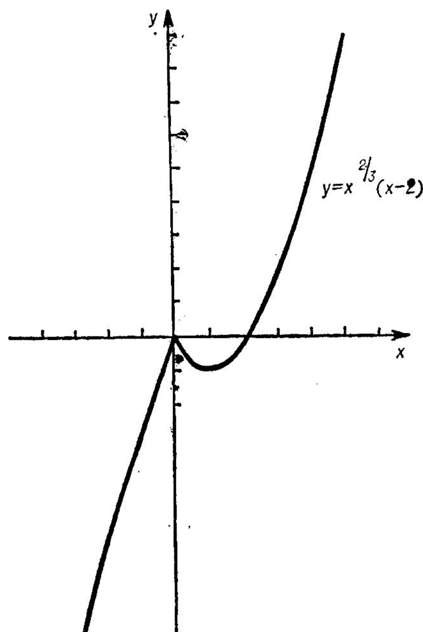
Sprendimas. Funkcija $f(x)$ yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje ir turi išvestinę

$$f'(x)=\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}},$$

kuri egzistuoja visoje skaičių tiesėje, išskyrus tašką $x=0$.



94 pav.



95 pav.

Kritiniai tos funkcijos taškai: $x_1=0$ ir $x_2=\frac{4}{5}$.

a) Sakykime, $x\in[-8;\ -1]$; tada nė vienas kritinis taškas nepriklauso tai atkarpai. Rasime funkcijos reikšmes atkarpos galuose: $f(-8)=-40$, $f(-1)=-3$

Taigi mažiausias iš skaičių -40 ir -3 yra mažiausia funkcijos f reikšmė atkarpoje $[-8;\ -1]$, t.y.

$$\min_{[-8;\ -1]} f=f(-8)=-40.$$

Didžiausias iš skaičių -40 ir -3 yra didžiausia funkcijos f reikšmė atkarpoje $[-8;\ -1]$, t.y.

$$\max_{[-8;\ -1]} f=f(-1)=-3.$$

b) Sakykime, $x\in[-1;\ 1]$; tada abu kritiniai taškai priklauso tai atkarpai. Todėl, norint rasti didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmes atkar-

poje $[-1; 1]$, reikia nagrinėti aibę reikšmių taškuose $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=\frac{4}{5}$ ir $x_4=1$:

$$f(-1)=-3,\quad f(0)=0,\quad f\left(\frac{4}{5}\right)\approx-1{,}03 \text{ ir } f(1)=-1.$$

Taigi

$$\max_{[-1;\,1]} f=f(0)=0 \text{ ir } \min_{[-1;\,1]} f=f(-1)=-3.$$

2 pavyzdys. Raskime didžiausią ir mažiausią funkcijos $f(x)=$ $=2x^3-9x^2+12x-3$ reikšmes atkarpoje $[0; 3]$.

Sprendimas. Išsprendę lygtį $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)=0$, rasime kritinius taškus

$$x_1=1,\quad x_2=2.$$

Toliau nagrinėsime aibę funkcijos f reikšmių taškuose $x_1=0, x_2=1$, $x_3=2$ ir $x_4=3$:

$$f(0)=-3,\quad f(1)=2,\quad f(2)=1,\quad f(3)=6.$$

Iš baigtinės skaičių aibės $\{-3; 1; 2; 6\}$ reikia išrinkti mažiausią, t.y. skaičių (-3); tai ir bus mažiausia duotosios funkcijos reikšmė atkarpoje $[0; 3]$, t.y. $\min\limits_{[0;\,3]} f=f(0)=-3$; paėmę didžiausią skaičių, t.y. skaičių 6, gausime didžiausią duotosios funkcijos reikšmę atkarpoje $[0; 3]$, t.y. $\max\limits_{[0;\,3]} f=$ $=f(3)=6$.

Pratimas

1. Raskite didžiausią ir mažiausią reikšmes šių funkcijų:

a) $f(x)=x^3-3x$ intervaluose $[-0{,}5; 0{,}5]$ ir $[-1{,}5; 2]$;
b) $f(x)=x^4-8x^2-9$ intervaluose $[-1; 1]$, $[0; 3]$ ir $[-3; 5]$;
c) $f(x)=-x^4+2x^2+3$ intervaluose $[-0{,}5; 0{,}7]$, $[-2; 0]$, $[-2; 2]$ ir $[0; 4]$;
d) $f(x)=\sqrt[3]{x^2(2-x)}$ intervaluose $[-6; -1]$ ir $[-2; 1]$.

2. Maksimumo ir minimumo uždaviniai. Naudojantis išvestinėmis, patogu nagrinėti daugelį praktinių uždavinių, kuriuos sprendžiant reikia rasti didžiausią arba mažiausią kokios nors funkcijos reikšmę.

1 uždavinys. Raskime didžiausio ploto stačiakampį, kurio perimetras $2p$.

Sprendimas. Stačiakampių, kurių perimetras $2p$, yra begalinė aibė. Iš tos stačiakampių aibės turime išskirti stačiakampį, kurio plotas būtų didžiausias. Sakykime, stačiakampio kraštinių ilgiai yra x ir y. Jo plotas $S=xy$, o perimetras $2x+2y=2p$. Vadinasi, $S(x)=x(p-x)$, nes $y=p-x$. Dabar ieškosime funkcijos $S(x)=x(p-x)$ didžiausios reikšmės, kai $0\leqslant x\leqslant p$. Tuo tikslu randame $S'(x)$: $S'(x)=p-2x$. Taigi kritinis funkcijos $S(x)$ taškas yra $x=\frac{p}{2}$.

Toliau nagrinėsime aibę funkcijos S reikšmių taškuose $x_1=0$, $x_2=\frac{p}{2}$ ir $x_3=p$:

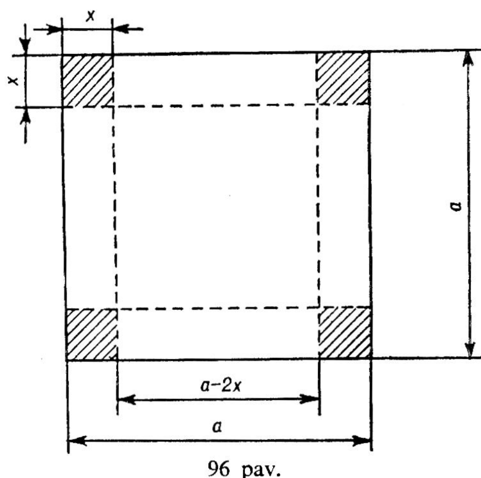
$$S(0)=0, \quad S\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{p^2}{4} \quad \text{ir} \quad S(p)=0.$$

Taigi $S\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{p^2}{4}$ yra didžiausia funkcijos reikšmė atkarpoje $[0; p]$. Vadinasi, plotas bus didžiausias, kai $x=\frac{p}{2}$. Dabar rasime y:

$$y=p-x=p-\frac{p}{2}=\frac{p}{2}.$$

Taigi $x=y$, t.y. ieškomasis stačiakampis yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus $\frac{p}{2}$.

2 uždavinys. Iš kvadratinio skardos lapo, kurio kraštinės ilgis yra a, reikia pagaminti didžiausio tūrio stačiakampio gretasienio formos indą (be dangčio), kurio pagrindas būtų kvadratas.



96 pav.

Sprendimas. Išpjaunamo kvadrato kraštinės ilgį žymėkime x (žr. 96 pav.). Kadangi indo pagrindas yra kvadratas, tai $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$, ir indo tūrį išreiškiame formule

$$V(x)=(a-2x)^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}.$$

Taigi reikia rasti didžiausią funkcijos $V(x)$ reikšmę atkarpoje $\left[0; \frac{a}{2}\right]$.

Kadangi $V'(x)=a^2-8ax+12x^2$, tai, išsprendę lygtį $12x^2-8ax+a^2=0$, rasime funkcijos $V(x)$ stacionariuosius taškus: $x_1=\frac{a}{6}$ ir $x_2=\frac{a}{2}$.

Toliau nagrinėsime funkcijos V reikšmes taškuose $x_1=0$, $x_2=\frac{a}{6}$ ir $x_3=\frac{a}{2}$. Kadangi

$$V(0)=0, \quad V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27} \quad \text{ir} \quad V\left(\frac{a}{2}\right)=0,$$

tai funkcija $V(x)$ įgyja didžiausią reikšmę atkarpoje $\left[0; \frac{a}{2}\right]$, kai $x=\frac{a}{6}$. Taigi, kai $x=\frac{a}{6}$, indo tūris bus didžiausias:

$$\max_{\left[0; \frac{a}{2}\right]} V=V\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{2a^3}{27}.$$

3 uždavinys. Laivo ekipažo išlaikymui kas valandą išleidžiama 480 rb. Suvartojamo kuro kiekis yra proporcingas laivo greičio kubui. Plaukiant 10 mazgų greičiu, per valandą kuro sudeginama už 30 rb. Kokiu pastoviu greičiu turi plaukti laivas, kad bendros išlaidos būtų minimalios?

Sprendimas. Sakykime, i yra bendros išlaidos per valandą. Tada $i=480+i_1$; čia i_1 yra sudeginto kuro kaina. Remiantis sąlyga, $i_1=kv^3$ čia k – proporcingumo koeficientas, v – greitis. Iš uždavinio sąlygos žinome, kad $i_1=30$, kai $v=10$, todėl $30=k\cdot 10^3$, t.y. $k=\frac{30}{10^3}=0{,}03$. Taigi $i=480+0{,}03\,v^3$. Bendros išlaidos $I=t\,(480+0{,}03\,v^3)$; čia t – laikas. Iš fizikos kurso žinoma, kad, kai judėjimas yra tolygus, $t=\frac{s}{v}$; čia s – kelio ilgis. Taigi

$$I(v)=\frac{s}{v}\,(480+0{,}03\,v^3)=480\,\frac{s}{v}+0{,}03\,sv^2,$$

o $v>0$.

Rasime funkcijos $I(v)$ kritinius taškus. Kadangi

$$I'(v)=-\frac{480\,s}{v^2}+0{,}06\,sv,$$

tai, išsprendę lygtį

$$-\frac{480\,s}{v^2}+0{,}06\,sv=0,$$

gausime $v^3=\frac{480}{0{,}06}=8000$, t.y. $v=20$. Pastebėsime, kad $I'(v)$ neegzistuoja taške $v=0$. Taigi $v=20$ yra kritinis funkcijos $I(v)$ taškas, nes $v=0$ nepriklauso tos funkcijos apibrėžimo sričiai. Lengvai galima nustatyti, kad taške $v=20$ funkcija $I(v)$ turi minimumą. Taigi išlaidos bus tuo artimesnės minimalioms, kuo greitis bus artimesnis 20 mazgų.

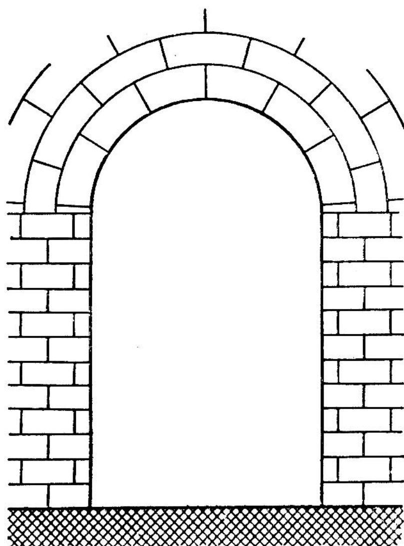
2. Reikia pagaminti 108 cm^3 tūrio dėžutę (be dangčio) su kvadrato formos dugnu. Kokių matmenų turi būti dėžutė, kad jai pagaminti reikėtų mažiausiai medžiagos?

3. Ilgio a vieliniu tinklu reikia aptverti stačiakampį sklypą, atsiremiantį į sieną. Kokių matmenų turi būti sklypas, kad jo plotas būtų didžiausias?

4. Materialus taškas juda tiese pagal dėsnį $s(t)=5t+2t^2-\frac{2}{3}t^3$; čia s — kelias metrais, t — laikas sekundėmis. Kokiu laiko t momentu taško judėjimo greitis bus didžiausias ir koks bus tas greitis?

5. Iš kartono gabalo 32 cm × 20 cm reikia padaryti didžiausios talpos dėžutę (be dangčio), išpjaunant kampuose kvadratus ir išsikišusias dalis užlenkiant.

6. Tunelio (arba šliuzo kanalo) skersinis pjūvis yra stačiakampis, iš viršaus uždengtas pusapskritimiu (97 pav.).



97 pav.

a) Pjūvio perimetras yra $2p$. Kokio spindulio turi būti pusapskritimis, kad pjūvio plotas būtų didžiausias?

b) Pjūvio plotas yra s. Kokiomis sąlygomis pjūvio perimetras būtų mažiausias?

7. Lempa kabo virš centro apskrito stalo, kurio spindulys yra R. Kokiame aukštyje ji turi kaboti, kad stipriausiai apšviestų daiktą, esantį stalo pakraštyje? (Apšvietimas yra tiesiog proporcingas šviesos spindulių kritimo kampo kosinusui ir atvirkščiai proporcingas atstumo nuo šviesos šaltinio kvadratui.)

8. Įrodykite, kad iš visų lygiašonių trikampių, įbrėžtų į duotąjį skritulį, didžiausią perimetrą turi lygiakraštis trikampis.

9. Raskite tokį teigiamą skaičių x, kad skirtumas $x-x^2$ būtų didžiausias.

10. Raskite skaičių, prie kurio pridėjus jo kvadratą, suma būtų mažiausia.

V SKYRIUS

Trigonometrija

§ 28. ĮVADAS

Toliau dėstoma medžiaga bus pagrįsta aštuonmetės mokyklos kursu, todėl trumpai priminsime, kas jame buvo svarbiausia.

Pagrindiniai trigonometrinių funkcijų sąryšiai:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Kampo $(-\alpha)$ trigonometrinių funkcijų išraiškos kampo α trigonometrinėmis funkcijomis:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Kampų $(90°\pm\alpha)$, $(180°\pm\alpha)$ trigonometrinių funkcijų išraiškos kampo α trigonometrinėmis funkcijomis:

$$\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha,\quad \sin(90°-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90°+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{tg}(90°-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(90°+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(90°-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \sin(180°-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha,\quad \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180°+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180°+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(180°-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Kai kurių kampų trigonometrinių funkcijų reikšmės:

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Stačiojo trikampio kampų ir kraštinių sąryšiai (a ir b – statiniai, c – įžambinė, $\hat{A}$ – kampas prieš statinį a):

$$\sin\hat{A}=\frac{a}{c},\quad a=c\sin\hat{A},\quad c=\frac{a}{\sin\hat{A}},$$

$$\cos\hat{A}=\frac{b}{c},\quad b=c\cos\hat{A},\quad c=\frac{b}{\cos\hat{A}},$$

$$\operatorname{tg}\hat{A}=\frac{a}{b},\quad a=b\operatorname{tg}\hat{A},\quad b=\frac{a}{\operatorname{tg}\hat{A}},$$

$$\operatorname{ctg}\hat{A}=\frac{b}{a},\quad b=a\operatorname{ctg}\hat{A},\quad a=\frac{b}{\operatorname{ctg}\hat{A}}.$$

Bet kokių trikampių kraštinių ir kampų sąryšiai (a, b, c – kraštinės, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ – kampai atitinkamai prieš kraštines a, b, c):

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A},\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B},$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C},$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}.$$

Trikampių plotų formulės:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A},\quad S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B},$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}.$$

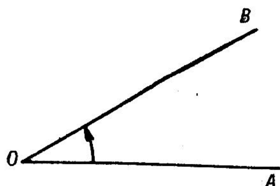
§ 29. SKAITINIO ARGUMENTO TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS

1. Kampų ir lankų matavimas radianais. Geometrijoje kampu yra vadinama figūra, kurią sudaro du spinduliai, išeinantys iš vieno taško.

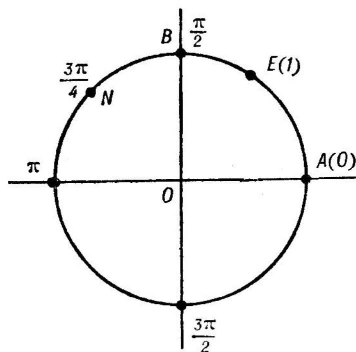
Į kiekvieną kampą galima žiūrėti kaip į spindulio sukimosi plokštumoje apie pradžios tašką rezultatą. Sukdami spindulį apie tašką O nuo pradinės padėties OA iki galinės padėties OB, gausime kampą AOB (98 pav.).

Kampų matavimo sąvoka yra žinoma iš geometrijos. Matuojant kampus, koks nors konkretus kampas imamas matavimo vienetu ir, lyginant su juo, matuojami kiti kampai.

Matavimo vienetu galima imti bet kokį kampą.



98 pav.



99 pav.

Praktikoje jau daugiau kaip tris tūkstančius metų kampo didumo matavimo vienetu laikoma $\frac{1}{360}$ viso apsisukimo dalis, vadinama laipsniu.

Technikoje kampų matavimo vienetu imamas visas apsisukimas.

Jūreivystėje kampų matavimo vienetu laikomas rombas, lygus viso apsisukimo $\frac{1}{32}$ daliai.

Artilerijoje kampų matavimo vienetu yra imama viso apsisukimo $\frac{1}{60}$ dalis; ji vadinama didžiąja kampainio padala (didžiosios kampainio padalos 0,01 dalis vadinama mažąja kampainio padala).

Vystantis technikai, prireikė matuoti dydžius, susijusius su judėjimu apskritimais (t.y. posūkius kiek norima dideliais kampais ir įvairius svyravimo parametrus, taip pat susijusius su judėjimu apskritimu). Reikėjo priimti naują universalių kampų ir lankų matavimo vienetą. Toks vienetas yra radianas (spindulinis vienetas). Jį pirmieji pavartojo savo darbuose Niutonas (1643—1727) ir Leibnicas (1646—1716), o įtvirtino moksle Peterburgo mokslų akademijos akademikas Leonardas Oileris (1707—1783).

Skaitytojas jau gerai žino skaičių ašį, t.y. tiesę, kurioje pažymėtas pradžios taškas O, mastelio vienetas OE ir teigiama kryptis. Naudojantis skaičių tiese, yra nustatyta abipus vienareikšmė atitiktis tarp realiųjų skaičių

aibės ir tiesės taškų aibės. Kiekvienam realiajam skaičiui z yra priskirtas tam tikras taškas M, kuris yra ilgio $|z|$ atkarpos OM galas. Atkarpa OM atidedama teigiama kryptimi, kai $z>0$, ir neigiama kryptimi, kai $z<0$. Taškas O atitinka skaičių $z=0$. Realusis skaičius z yra vadinamas taško M koordinate ir žymimas $M(z)$.

Sakykime, duotas koks nors vienetinis apskritimas, t.y. apskritimas, kurio centras yra koks nors taškas O ir spindulys lygus mastelio vienetui. Imkime bet kurį to apskritimo tašką A (99 pav.).

Panašiai kaip ir tiesėje, kiekvienam skaičiui $\alpha \in]0; 2\pi[$ priskirsime tokį vienetinio apskritimo tašką M_α, kad lanko AM_α ilgis būtų α, o lankas AM_α būtų atidėtas nuo taško A priešingai, negu juda laikrodžio rodyklė. Skaičiui 0 ir skaičiui 2π priskirsime tašką A. Taigi tarp vienetinio apskritimo taškų ir intervalo $[0; 2\pi[$ taškų yra nustatyta abipus vienareikšmė atitiktis. Skaičius α yra vadinamas lanko AM_α ir atitinkamo kampo AOM_α ***radianiniu matu.***

Iš apibrėžimo išplaukia, kad kampas, kurio radianinis matas lygus 1, — tai kampas, kongruentus centriniam vienetinio apskritimo kampui, kuris remiasi į vieneto ilgio lanką.

Iš apskritimo lanko ilgio formulės gausime formulę, siejančią radianinį ir laipsninį kampo matus. Iš tikrųjų, jeigu α yra ilgis vienetinio apskritimo lanko, kurio laipsninis matas yra β, tai

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot \beta.$$

Taigi radiano lankas atitinka $\frac{180}{\pi}$ laipsnių:

$$\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ\, 17'\, 45''.$$

1° lankas atitinka $\frac{\pi}{180}$ radianų:

$$\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175.$$

Laipsninius kampo matus galima pakeisti radianiniais ir atvirkščiai, naudojantis lentelėmis (žr., pavyzdžiui, V. Bradžio „Keturženkles matematines lenteles").

Pateiksime dažnai pasitaikančių kampų ir lankų lentelę.

Laipsniai	360°	180°	90°	60°	45°	30°	18°	15°	10°	1°	β°
Radianai	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180} \cdot \beta$

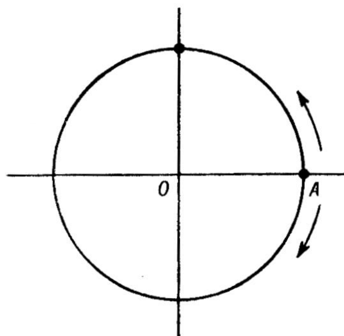
Vėl nagrinėsime vienetinį apskritimą su pažymėtu tašku A (žr. 99 pav.).

Kiekvienam skaičiui $\alpha \in]-2\pi; 0[$ priskirsime tokį duotojo vienetinio apskritimo tašką M_α, kad lanko AM_α ilgis būtų $|\alpha|$ ir tas lankas būtų atidėtas nuo taško A laikrodžio rodyklės judėjimo kryptimi (100 pav.). Skaičiui -2π priskirsime tašką A.

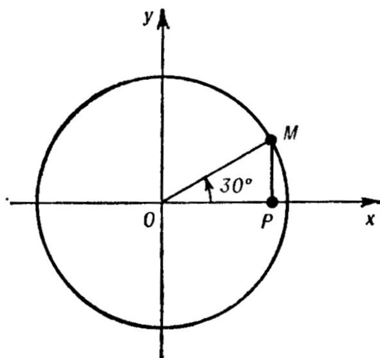
Bet kokį skaičių α užrašysime šitaip:

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi;$$

čia k – sveikasis skaičius, o $\alpha_0 \in]-2\pi;\ 2\pi[$. Pastebėsime, kad taip galima užrašyti kiekvieną α. Dabar skaičiui α priskirsime tą patį tašką, kaip ir skaičiui α_0, t.y. taškai M_α ir M_{α_0} sutampa.



100 pav.



101 pav.

Tokiu būdu nustatėme atitiktį tarp realiųjų skaičių ir vienetinio apskritimo taškų. Ši atitiktis sudaryta taip, kad taškai $M_{\alpha+2\pi}$, $M_{\alpha-2\pi}$, M_α sutampa.

Apie tašką M_α sakoma, kad jis gaunamas iš taško A, pastarąjį pasukus $|\alpha|$ radianų kampu prieš laikrodžio rodyklę, kai $\alpha > 0$, ir pagal laikrodžio rodyklę, kai $\alpha < 0$. Sukimas prieš laikrodžio rodyklę kartais vadinamas sukimu teigiama kryptimi, o sukimas pagal laikrodžio rodyklę – sukimu neigiama kryptimi.

2. Trigonometrinės skaitinio argumento funkcijos. Pirmajame skirsnyje buvo nustatyta atitiktis tarp visų realiųjų skaičių aibės ir vienetinio apskritimo taškų aibės – kiekvienam realiajam skaičiui α buvo priskirtas vienetinio apskritimo taškas M_α.

Sakykime, plokštumoje nubrėžta stačiakampė koordinačių sistema, kurios pradžia sutampa su nagrinėjamo vienetinio apskritimo centru, o vienetinis abscisių ašies taškas sutampa su tašku A.

Sakykime, x_α, y_α yra taško M_α koordinatės. Tada kiekvienam skaičiui α yra priskirti du skaičiai x_α ir y_α. Skaičius y_α yra vadinamas sinusu α ir žymimas $\sin\alpha$, o skaičius x_α vadinamas kosinusu α ir žymimas $\cos\alpha$.

Funkcija $\sin\alpha$, $\alpha \in]-\infty;\ +\infty[$, yra vadinama *sinusu*.

Funkcija $\cos\alpha$, $\alpha \in]-\infty;\ +\infty[$ yra vadinama *kosinusu*.

1 pavyzdys. Raskime skaičiaus $\alpha = \frac{13}{6}\pi$ sinusą.

Sprendimas. Kadangi

$$\frac{13}{6}\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi,$$

tai tą skaičių atitinka tas pats taškas M, kaip ir skaičių $\frac{\pi}{6}$. Iš taško M nuleidę statmenį MP į Ox ašį (101 pav.), turėsime $|PM| = y$. Stačiajame tri-

kampyje POM įžambinės OM ilgis lygus 1 (nes apskritimas yra vienetinis), statinio PM ilgis lygus $\frac{1}{2}$ (nes statinis yra prieš 30° kampą). Taigi taško M ordinatė yra 0,5, t.y. $y=0,5$.

Atsakymas: $\sin\frac{13}{6}\pi=0,5$.

2 pavyzdys. Raskime sin 1,17.

Sprendimas. V. Bradžio „Keturženklėse matematinėse lentelėse" randame:

$$\sin 1,17\approx 0,9208.$$

Realiojo skaičiaus α tangentu vadinamas santykis $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; jis žymimas $\operatorname{tg}\alpha$.

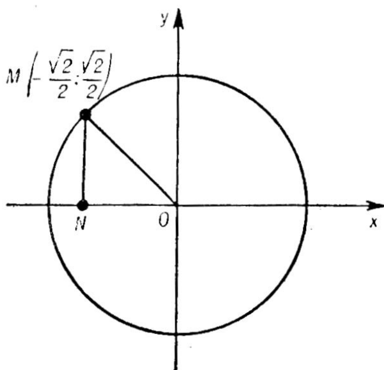
Lengva pastebėti, kad $\operatorname{tg}\alpha$ yra apibrėžtas visiems realiesiems skaičiams $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

Funkcija $\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha\in R$, $\alpha\neq\pm\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, vadinama *tangentu.*

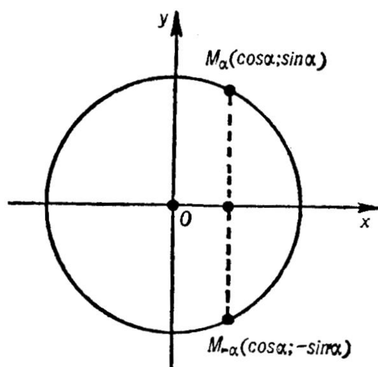
Realiojo skaičiaus α kotangentu vadinamas santykis $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; jis žymimas $\operatorname{ctg}\alpha$. Lengva pastebėti, kad $\operatorname{ctg}\alpha$ yra apibrėžtas visiems realiesiems skaičiams $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$.

Funkcija $\operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha\in R$, $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, vadinama *kotangentu.*

3 pavyzdys. Raskime $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$ ir $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$.



102 pav.



103 pav.

Sprendimas. Skaičių apskritime skaičių $\frac{3\pi}{4}$ atitinka taškas M, kuris yra 135° didumo lanko galas. Iš taško M nuleiskime statmenį į Ox ašį. Trikampis OMN yra statusis ir lygiašonis (102 pav.). Taško M koordinatės:

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Taigi

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}:-\frac{\sqrt{2}}{2}=-1;\quad \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=\frac{x}{y}=-\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=-1.$$

Atsakymas:

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1,\quad \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1.$$

3. Lyginės ir nelyginės trigonometrinės funkcijos. Įrodysime, kad kosinusas yra lyginė funkcija, o sinusas, tangentas ir kotangentas — nelyginės funkcijos.

Sakykime, duotas vienetinis apskritimas su centru koordinačių pradžioje. Bet kuriuos du priešingus realiuosius skaičius α ir $-\alpha$ atitiks du to apskritimo taškai M_α ir $M_{-\alpha}$, simetriški abscisių ašies atžvilgiu (103 pav.). Kadangi M_α ir $M_{-\alpha}$ — vienetinio apskritimo taškai, tai taško M_α koordinatės yra skaičiai $\cos\alpha$ ir $\sin\alpha$, o taško $M_{-\alpha}$ koordinatės — skaičiai $\cos(-\alpha)$ ir $\sin(-\alpha)$. Kadangi taškai M_α ir $M_{-\alpha}$ yra simetriški Ox atžvilgiu, tai jų abscisės sutampa, o ordinatės yra priešingos. Tuo remiantis, bet kokiems galimiems skaičiams α yra teisingos lygybės

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha, \tag{1}$$

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha, \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha. \tag{4}$$

(1) formulė reiškia, kad kosinusas yra lyginė funkcija, o (2), (3) ir (4) formulės reiškia, kad sinusas, tangentas ir kotangentas — nelyginės funkcijos. Tai ir reikėjo įrodyti.

1 pavyzdys.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}.$$

2 pavyzdys.

$$\cos(-135^\circ)=\cos 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin(-135^\circ)=-\sin 135^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}(-135^\circ)=-\operatorname{tg}135^\circ=1,\quad \operatorname{ctg}(-135^\circ)=-\operatorname{ctg}135^\circ=1.$$

§ 30. PAGRINDINIAI TO PATIES ARGUMENTO TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ SĄRYŠIAI

1. Pagrindiniai to paties argumento trigonometrinių funkcijų sąryšiai. Remiantis sinuso ir kosinuso apibrėžimu,

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \qquad \text{(I)}$$

Iš tangento ir kotangento apibrėžimų

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \qquad \text{(II)}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \qquad \text{(III)}$$

išplaukia, kad

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1. \qquad \text{(IV)}$$

(I) tapatybę panariui padalįję iš $\cos^2 \alpha$, gausime tapatybę

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \qquad \text{(V)}$$

o tą pačią tapatybę padalįję iš $\sin^2 \alpha$, gausime tapatybę

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \qquad \text{(VI)}$$

Atkreipsime dėmesį, kad kiekviena trigonometrinė tapatybė yra lygybė, teisinga visoms galimoms argumento α reikšmėms, t.y. visoms toms argumento reikšmėms, kurioms kairioji ir dešinioji pusės (kiekviena) turi prasmę. Pavyzdžiui, lygybė $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$ yra teisinga visoms argumento α reikšmėms, kurioms $\operatorname{tg} \alpha$ ir $\operatorname{ctg} \alpha$ (abu) turi prasmę, t.y. visiems α, išskyrus $\alpha = k\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, kuriems arba tangentas, arba kotangentas yra neapibrėžti.

Remiantis pagrindinėmis trigonometrinėmis tapatybėmis, galima įrodyti įvairias kitas tapatybes ir atlikti įvairius trigonometrinius pertvarkymus, taikant bendras algebrinių reiškinių veiksmų taisykles.

1 pavyzdys. Įrodykime, kad

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}.$$

Įrodymas. Pertvarkysime dešiniąją pusę, vienetą skaitiklyje pakeitę $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$. Gausime

$$\frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

Skaitiklį ir vardiklį dalijame iš $\cos \alpha$:

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Taigi gavome tokį pat reiškinį, kaip ir kairėje duotosios lygybės pusėje. Tai ir reikėjo įrodyti.

2 pavyzdys. Suprastinkime reiškinį

$$A=\sqrt{\frac{8}{1+\cos\alpha}+\frac{8}{1-\cos\alpha}}.$$

Sprendimas. Turime

$$A=\sqrt{\frac{8}{1+\cos\alpha}+\frac{8}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{8(1-\cos\alpha)+8(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}}=$$

$$=\sqrt{\frac{16}{\sin^2\alpha}}=\frac{4}{\sqrt{\sin^2\alpha}}=\frac{4}{|\sin\alpha|}.$$

Taigi $A=\frac{4}{\sin\alpha}$, kai $\sin\alpha>0$, ir $A=-\frac{4}{\sin\alpha}$, kai $\sin\alpha<0$.

2. Trigonometrinių funkcijų reiškimas viena iš tų funkcijų. Žinant pagrindines trigonometrines tapatybes, bet kurią trigonometrinę funkciją galima išreikšti bet kuria kita (to paties argumento) trigonometrine funkcija.

Iš (I) tapatybės galima, pavyzdžiui, kosinusą išreikšti sinusu:

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

kiekvienam $\alpha\in R$. Konkrečiais atvejais

$$\cos\alpha=\begin{cases}\sqrt{1-\sin^2\alpha}, & \text{kai } 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ arba } \frac{3\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant 2\pi,\\ -\sqrt{1-\sin^2\alpha}, & \text{kai } \frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

Kiekvienos trigonometrinės funkcijos išraiškos bet kuria kita trigonometrine funkcija pateiktos šioje lentelėje:

Ieškomoji funkcija	Ieškomosios funkcijos išraiška			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\sin\alpha=$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha=$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$
$\mathrm{tg}\,\alpha=$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha=$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Ypač svarbu suprasti, kad prieš radikalą esantys du ženklai ($\pm$) nereiškia, jog yra du atsakymai. Kiekvienu konkrečiu atveju imamas tik vienas ženklas. Visos išraiškos ženklas turi sutapti su ieškomosios funkcijos ženklu, esant duotajai argumento reikšmei.

1 pavyzdys. Duota $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Raskime $\cos\alpha$.

Sprendimas. Taškas M_α yra pirmajame ketvirtyje, todėl

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Atsakymas: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

2 pavyzdys. Duota $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Raskime $\cos\alpha$.

Sprendimas. Taškas M_α yra antrajame ketvirtyje, todėl $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Atsakymas: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

3 pavyzdys. Duota $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Raskime $\cos\alpha$.

Sprendimas. Uždavinyje nenurodyta, kuriame ketvirtyje yra taškas M_α, todėl atsakymas bus nevienareikšmis. Remiantis uždavinio sąlyga, $\sin\alpha > 0$, todėl taškas M_α yra arba pirmajame, arba antrajame ketvirtyje; pirmajame ketvirtyje kosinuso reikšmė yra teigiamas skaičius, antrajame – neigiamas.

Atsakymas. Jeigu $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tai $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; jeigu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, tai $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

4 pavyzdys. Duota $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Apskaičiuokite $\sin\alpha$.

Sprendimas. Taškas M_α yra ketvirtajame ketvirtyje, todėl

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{-\frac{4}{3}}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = -\frac{4}{5}.$$

(Iš dviejų ženklų yra paimtas pliusas, nes sinuso ir tangento ženklai ketvirtajame ketvirtyje sutampa.)

Pratimai

1. Duota $\sin\alpha = 0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Reikia apskaičiuoti $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ ir $\operatorname{ctg}\alpha$.
2. Raskite $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$, kai žinoma, kad $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$ ir $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
3. Ar gali būti teisingos tai pačiai argumento α reikšmei šios lygybės:

   a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, b) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$;

   c) $\sin\alpha = -0{,}8$, $\cos\alpha = -0{,}6$; d) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{40}}{7}$, $\cos\alpha = \frac{3}{7}$?

4. Nustatykite, ar gali būti teisingos su ta pačia argumento reikšme šios lygybės:

$$\sin\alpha=\frac{1}{5}, \quad \cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{24}}.$$

5. Kokias reikšmes įgis $\sin\alpha$, kai $\cos\alpha\approx 0{,}7538$?

6. Duota $\cos\alpha=\frac{b}{c}$, $0<b<c$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Raskite $\operatorname{tg}\alpha$.

7. Raskite $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, kai $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\pi>\alpha>\frac{\pi}{2}$.

8. Raskite $\sin\alpha$, kai $\alpha\approx 0{,}4363$.

9. Raskite $\cos\alpha$, kai $\alpha\approx 1{,}3963$.

10. Raskite $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

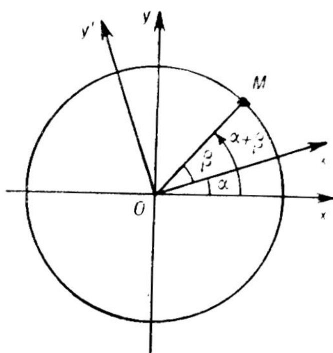
11. Raskite $\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$, kai $\alpha=10^\circ$.

§ 31. PAGRINDINĖS TRIGONOMETRIJOS FORMULĖS IR JŲ IŠVADOS

1. Dviejų argumentų sumos ir skirtumo trigonometrinės funkcijos. Sakykime, duoti du realieji skaičiai α ir β. Nagrinėsime paprasčiausią atvejį, kai $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta\leqslant 2\pi$.

Sakykime, realųjį skaičių $\alpha+\beta$ atitinka vienetinio apskritimo taškas M, kurio koordinatės yra spindulio vektoriaus $\vec{OM}$ koordinatės. Turime

$$\vec{OM}=\boldsymbol{i}\cos(\alpha+\beta)+\boldsymbol{j}\sin(\alpha+\beta). \qquad (1)$$



104 pav.

Imsime kitą koordinačių sistemą, gaunamą iš pirmosios, pastarąją pasukus kampu α prieš laikrodžio rodyklę (104 pav.). Tada to paties spindulio vektoriaus $\vec{OM}$ koordinatės naujojoje sistemoje bus

$$\vec{OM}=\boldsymbol{i}'\cos\beta+\boldsymbol{j}'\sin\beta. \qquad (2)$$

Dabar vienetinius naujosios sistemos vektorius išreikšime vienetiniais senosios sistemos vektoriais:

$$\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha,\quad \boldsymbol{j}'=-\boldsymbol{i}\sin\alpha+\boldsymbol{j}\cos\alpha.$$

Taigi (2) lygybę galime užrašyti šitaip:

$$\overrightarrow{OM}=(\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha)\cos\beta+(-\boldsymbol{i}\sin\alpha+\boldsymbol{j}\cos\alpha)\sin\beta,$$

t.y.

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{i}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+\boldsymbol{j}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta). \qquad (3)$$

Kadangi vektoriaus išraiška dviem baziniais vektoriais yra vienintelė, tai, palyginę (1) ir (3) lygybes, gausime

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \text{(VII)}$$

ir

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad \text{(VIII)}$$

Bendruoju atveju (VII) ir (VIII) formulės yra įrodomos analogiškai. Laikysime, kad jos yra įrodytos bet kokiems realiesiems skaičiams α ir β.

(VII) formulėje skaičių β pakeitę skaičiumi $-\beta$, gausime argumentų skirtumo sinuso formulę

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

t.y.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad \text{(IX)}$$

(VIII) formulėje skaičių β pakeitę skaičiumi $-\beta$, gausime argumentų skirtumo kosinuso formulę

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta),$$

t.y.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad \text{(X)}$$

Dviejų argumentų sumos tangento ir kotangento formules galima gauti iš (VII)–(X) formulių:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}. \qquad (4)$$

Kadangi argumentų $\frac{\pi}{2}+\pi k$ tangentas nėra apibrėžtas, tai reikia laikyti, kad $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Gautoji (4) formulė bus paprastesnė, jeigu dešiniąją (4) lygybės pusę padalysime iš sandaugos $\cos\alpha\cos\beta$. Gausime

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

t.y.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad \text{(XI)}$$

Jeigu (XI) formulėje skaičių β pakeisime skaičiumi $-\beta$, tai gausime

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

t.y.

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \text{(XII)}$$

nes tangentas yra nelyginė funkcija.

Atkreipsime dėmesį, kad (XI) ir (XII) formulėse skaičiai α, β, $\alpha+\beta$ ir $\alpha-\beta$ negali būti pavidalo $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

Analogiškai yra išvedamos argumentų sumos ir skirtumo kotangento formulės:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}. \qquad \text{(XIII)}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}. \qquad \text{(XIV)}$$

1 pavyzdys. Apskaičiuokime $\cos 75°$.
Sprendimas.

$$\cos 75°=\cos(45°+30°)=\cos 45°\cos 30°-\sin 45°\sin 30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}25.$$

Atsakymas: $\cos 75°\approx 0{,}25$.
2 pavyzdys. Apskaičiuokime $\sin 75°$.
Sprendimas.

$$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}96.$$

Atsakymas: $\sin 75°\approx 0{,}96$.
3 pavyzdys. Apskaičiuokime $\sin 15°$.
Sprendimas.

$$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}25.$$

Atsakymas: $\sin 15°\approx 0{,}25$.

4 pavyzdys. Duota $\sin\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=0{,}8$. Žinoma, kad $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$. Rasime $\sin(\alpha+\beta)$ ir $\cos(\alpha+\beta)$.

Sprendimas.

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-0{,}6^2}=-0{,}8,\quad \cos\beta=-\sqrt{1-0{,}8^2}=-0{,}6,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=0{,}6\cdot(-0{,}6)+(-0{,}8)\cdot0{,}8=-0{,}36-0{,}64=-1,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=(-0{,}8)\cdot(-0{,}6)-0{,}6\cdot0{,}8=0.$$

Pratimai

1. Apskaičiuokite:
a) $\sin 14^\circ\cos 31^\circ+\sin 31^\circ\cos 14^\circ$; b) $\sin 55^\circ\cos 35^\circ+\sin 35^\circ\cos 55^\circ$;
c) $\sin 63^\circ\cos 33^\circ-\cos 63^\circ\sin 33^\circ$;
d) $\sin 24^\circ\cos 36^\circ-\cos 24^\circ\sin(-36^\circ)$; e) $\sin 105^\circ$.

2. Suprastinkite reiškinį $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

3. Apskaičiuokite $\sin 47^\circ\cos 43^\circ+\sin 43^\circ\cos 47^\circ$.

4. Raskite sandaugų sumą $\sin 80^\circ\cos 10^\circ+\cos 80^\circ\sin 10^\circ$.

5. Raskite sandaugų skirtumą $\cos 5^\circ\cos 40^\circ-\sin 5^\circ\sin 40^\circ$.

6. Apskaičiuokite reiškinio $\cos 127^\circ\sin 37^\circ-\cos 37^\circ\sin 127^\circ$ reikšmę.

7. Apskaičiuokite $\cos 105^\circ$.

8. Įrodykite šias tapatybes:

$$\text{a) } \sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\quad \text{b) } \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

9. Apskaičiuokite sumos $\alpha+\beta$ sinusą, kai

$$\cos\alpha=-\frac{8}{17},\ \cos\beta=\frac{4}{5},\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi.$$

10. Raskite $\sin(\alpha+\beta)$ reikšmę, kai

$$\sin\alpha=\frac{12}{13},\ \cos\beta=-\frac{3}{5},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}.$$

11. Suprastinkite reiškinį $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

12. Įrodykite tapatybę $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$.

13. Raskite $\operatorname{tg} 105^\circ$.

14. Apskaičiuokite a) $\dfrac{\operatorname{tg}17^\circ+\operatorname{tg}43^\circ}{1-\operatorname{tg}17^\circ\operatorname{tg}43^\circ}$; b) $\dfrac{\operatorname{tg}19^\circ-\operatorname{tg}41^\circ}{1+\operatorname{tg}19^\circ\operatorname{tg}41^\circ}$.

15. Raskite $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, kai

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4},\ \cos\beta=\frac{3}{5}\ \text{ir}\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

16. Apskaičiuokite $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, kai

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}\ \text{ir}\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

17. Apskaičiuokite $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, kai

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}\ \text{ir}\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}.$$

2. Redukcijos formulės. Formulės, kuriose argumentų

$$-\alpha;\ \frac{\pi}{2}\pm\alpha;\ \pi\pm\alpha;\ \frac{3}{2}\pi\pm\alpha;\ 2\pi k\pm\alpha$$

trigonometrinės funkcijos išreiškiamos argumento α trigonometrinėmis funkcijomis, kai α yra bet kuri galima argumento reikšmė, vadinamos *redukcijos formulėmis.* Tos formulės išplaukia iš paties trigonometrinių funkcijų apibrėžimo.

Visos redukcijos formulės yra surašytos toliau pateikiamoje lentelėje.

Argumentas	Funkcija			
	cos	sin	tg	ctg
$-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Pirmoji tos lentelės eilutė rodo, kurios trigonometrinės funkcijos yra lyginės, o kurios – nelyginės.

Paaiškinsime, kaip reikia naudotis redukcijos formulių lentele. Pavyzdžiui, ieškome $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$. Randame funkcijos ctg stulpelį ir argumento $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ eilutę; jų sankryžoje yra $-\operatorname{tg}\alpha$. Taigi $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)^2=$ $=-\operatorname{tg}\alpha$.

Remiantis redukcijos formulėmis, galima rasti bet kokių argumentų trigonometrinių funkcijų reikšmes, kai yra žinomos tų funkcijų reikšmės mažesnėms argumento reikšmėms.

Vadinasi, užtenka žinoti trigonometrinių funkcijų reikšmes, kai $\alpha \in \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

Naudojantis redukcijos formulių lentele, argumentus $|\beta| > \frac{\pi}{2}$ galima pakeisti argumentais $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Remiantis lentele, funkcijų pavadinimai nesikeičia, kai argumento reikšmės yra $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$; visais kitais atvejais funkcijos pavadinimai keičiasi panašiais (sinusas – kosinusu, tangentas – kotangentu ir atvirkščiai).

3. Dvigubo ir pusės argumento trigonometrinės funkcijos. Dvigubo argumento formulės argumento 2α trigonometrines funkcijas išreiškia argumento α trigonometrinėmis funkcijomis.

(VIII) formulėje paėmę $\beta = \alpha$, gausime

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad \text{(XV)}$$

Taigi dvigubo argumento kosinusas yra lygus to argumento kosinuso ir sinuso kvadratų skirtumui.

(VII) formulėje paėmę $\beta = \alpha$, gausime

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad \text{(XVI)}$$

Taigi dvigubo argumento sinusas yra lygus dvigubai to argumento sinuso ir kosinuso sandaugai.

Analogiškai įrodomos dvigubo argumento tangento ir kotangento formulės:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \text{(XVII)}$$

ir

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}. \qquad \text{(XVIII)}$$

1 pavyzdys.

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

2 pavyzdys.

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3 pavyzdys. Raskime $\operatorname{tg} 2\alpha$, kai $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

Sprendimas.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = 3\frac{3}{7}.$$

4 pavyzdys. Raskime $\sin 2\alpha$, kai $\sin\alpha=0{,}8$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Sprendimas.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot 0{,}8\cos\alpha = 1{,}6\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha} =$$
$$= 1{,}6\cdot\sqrt{1-0{,}8^2} = 0{,}96.$$

(XV) formulės dešiniąją pusę išreiškę tik viena trigonometrine funkcija (sinusu arba kosinusu), gausime

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Remiantis tomis formulėmis, $\sin^2\alpha$ ir $\cos^2\alpha$ galima išreikšti $\cos 2\alpha$:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

arba

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}, \qquad \text{(XIX)}$$
$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}. \qquad \text{(XX)}$$

5 pavyzdys. Apskaičiuokime $\sin\alpha$, kai $\cos 2\alpha=\frac{4}{5}$ ir $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{0{,}1}\,.$$

6 pavyzdys. Apskaičiuokime $\sin\frac{\pi}{8}=\sin 22{,}5^\circ$ ir $\cos 22{,}5^\circ$.

Sprendimas. Kadangi $\cos\frac{\pi}{4}=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, tai

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$
$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Prieš šaknį reikia rašyti pliuso ženklą, nes $\sin\frac{\pi}{8}>0$ ir $\cos\frac{\pi}{8}>0$.

7 pavyzdys. Raskime $\cos\frac{\alpha}{2}$, kai $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ ir $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Sprendimas. Randame $\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$. Kadangi $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$, tai $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, todėl

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Pratimai

18. Raskite $\cos 2\alpha$ ir $\operatorname{tg} 2\alpha$, kai $\sin\alpha = 0{,}8$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

19. Raskite $\sin 2\alpha$, kai $\cos\alpha = \frac{8}{13}$, $\sin\alpha > 0$.

20. Duotos dvi funkcijos: $\sin 2\alpha$ ir $2\sin\alpha$. Reikia nustatyti, kurios funkcijos reikšmės yra didesnės, kai $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

21. Suprastinkite reiškinius:

a) $\frac{2\operatorname{tg} 30^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 30^\circ}$; b) $1+\cos 2\alpha - 2\sin^2\alpha$.

22. Įrodykite, kad $\cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = 0{,}25$.
23. Raskite $\cos\alpha$, kai $\cos 2\alpha = 0{,}5$.
24. Apskaičiuokite:

a) $\sin 2\alpha$, kai $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ir $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\cos 2\alpha$, kai $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ ir $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

c) $\operatorname{tg} 2\alpha$, kai $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ ir $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

d) $\operatorname{ctg} 2\alpha$, kai $\operatorname{tg}\alpha = 2$ ir $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

4. Trigonometrinių funkcijų reiškimas pusės argumento tangentu. Trigonometrines funkcijas $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ir $\operatorname{tg}\alpha$ paprastai išreikšime funkcija $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Tuo tikslu (XV) ir (XVI) formules užrašysime šitaip:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \text{ ir } \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

arba

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} \text{ ir } \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Paskutinėse lygybėse vardiklis tapačiai lygus 1. Sakykime, $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, $k \in Z$. Tada, paskutinių lygybių dešiniųjų pusių skaitiklius ir vardiklius padaliję iš $\cos^2 \frac{\alpha}{2} \neq 0$, gausime

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \qquad \text{(XXI)}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \qquad \text{(XXII)}$$

Iš (XXI) ir (XXII) lygybių išplaukia, kad

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \qquad \text{(XXIII)}$$

$\left(\text{toje tapatybėje } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \alpha \neq \pi + 2k\pi\right)$.

5. Trigonometrinių funkcijų sandaugos keitimas jų suma ir skirtumu. Panariui sudėję (VII) ir (IX) tapatybes:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \qquad \text{(VII)}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \qquad \text{(IX)}$$

gausime

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

t.y.

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}. \qquad \text{(XXIV)}$$

Iš (VII) tapatybės panariui atėmę (IX), gausime

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta,$$

t.y.

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}. \qquad \text{(XXV)}$$

Panariui sudėję (VIII) ir (X) tapatybes:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \qquad \text{(VIII)}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \qquad \text{(X)}$$

gausime

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

t.y.

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}. \qquad \text{(XXVI)}$$

Iš (VIII) tapatybės atėmę (X), gausime

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta,$$

t.y.

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}. \qquad \text{(XXVII)}$$

Pratimai

25. Nesinaudodami lentelėmis, apskaičiuokite:

a) $\sin 82°30'\cos 52°30'$; b) $\sin 82°30'\cos 37°30'$;

c) $\cos 37°30'\cos 7°30'$; d) $\cos 82°30'\cos 37°30'$;

e) $\cos 75°\cos 105°$; f) $\cos 45°\cos 75°$.

26. Sandaugas pakeiskite sumomis:

a) $\sin 10°\sin 20°$; b) $\sin 45°\cos 30°$; c) $\cos 35°\sin 25°$;

d) $\cos 55°\cos 20°$; e) $\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)$;

f) $\sin(x+\alpha)\cos(x-\alpha)$; g) $\cos(x+\alpha)\cos(x-\alpha)$.

27. Įrodykite tapatybę $2\sin\alpha\sin 2\alpha+\cos 3\alpha=\cos\alpha$.

6. Sinusų sumos (skirtumo) keitimas sandauga. Sinuso ir kosinuso sandaugos formulę galima užrašyti šitaip:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]. \qquad (1)$$

Ta tapatybė yra teisinga visoms α ir β reikšmėms.

Sakykime, $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$. Apibrėšime α ir β kaip sistemos

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x,\\ \alpha-\beta=y\end{cases}$$

sprendinį. Sudėję lygtis panariui, gausime $2\alpha=x+y$, todėl

$$\alpha=\frac{x+y}{2}.$$

Atėmę lygtis panariui, gausime $2\beta=x-y$, todėl

$$\beta=\frac{x-y}{2}.$$

α ir β reikšmes įrašę į (1) tapatybę, gausime

$$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}(\sin x+\sin y),$$

t.y.

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \text{(XXVIII)}$$

Sinusų suma yra lygi duotųjų argumentų sumos pusės sinuso ir tų argumentų skirtumo pusės kosinuso dvigubai sandaugai.

(XXVIII) formulėje argumentą y pakeitę argumentu $-y$, gausime

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}. \qquad \text{(XXIX)}$$

Sinusų skirtumas yra lygus duotųjų argumentų skirtumo pusės sinuso ir tų argumentų sumos pusės kosinuso dvigubai sandaugai.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime $\sin 75°+\sin 15°$.

Sprendimas.

$$\sin 75°+\sin 15°=2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2}=$$

$$=2\sin 45°\cos 30°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuokime $\sin\frac{5}{12}\pi-\sin\frac{\pi}{12}$.

Sprendimas.

$$\sin\frac{5}{12}\pi-\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pratimai

28. Nesinaudodami lentelėmis ir remdamiesi dviejų kampų sumos ir skirtumo sinusų formulėmis, apskaičiuokite:

a) $\sin 105°+\sin 75°$; b) $\sin 105°-\sin 75°$;

c) $\sin\frac{11}{12}\pi+\sin\frac{5}{12}\pi$; d) $\sin\frac{11}{12}\pi-\sin\frac{5}{12}\pi$;

e) $\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{7}{12}\pi$; f) $\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{7}{12}\pi$.

29. Suprastinkite šiuos reiškinius:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; b) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

30. Pakeiskite sandaugomis šiuos reiškinius:

a) $1+2\sin\alpha$; b) $1-2\sin\alpha$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\alpha$; d) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$.

7. Kosinusų sumos (skirtumo) keitimas sandauga. Kosinusų sumą ir skirtumą galima išreikšti šitaip:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \qquad \text{(XXX)}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \qquad \text{(XXXI)}$$

Kosinusų suma yra lygi duotųjų argumentų sumos pusės kosinuso ir tų argumentų skirtumo pusės kosinuso dvigubai sandaugai.

Kosinusų skirtumas yra lygus duotųjų argumentų sumos pusės sinuso ir tų argumentų skirtumo pusės sinuso dvigubai sandaugai su minuso ženklu.

1 pavyzdys. Suprastinkime ir apskaičiuokime $\cos 75°+\cos 15°$.

Sprendimas.

$$\cos 75°+\cos 15°=2\cos\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2}=$$

$$=2\cos 45°\cos 30°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

2 pavyzdys. Suprastinkime ir apskaičiuokime $\cos\frac{5}{12}\pi-\cos\frac{\pi}{12}$.

Sprendimas.

$$\cos\frac{5}{12}\pi-\cos\frac{\pi}{12}=-2\cdot\sin\frac{\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{12}}{2}=$$

$$=-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pratimai

31. Nesinaudodami lentelėmis, apskaičiuokite:

a) $\cos 97°+\cos 83°$; b) $\cos 105°-\cos 75°$;

c) $\cos\frac{11}{12}\pi+\cos\frac{5}{12}\pi$; d) $\cos\frac{11}{12}\pi-\cos\frac{5}{12}\pi$.

32. Suprastinkite šiuos reiškinius:

a) $\cos(\alpha+60°)+\cos(\alpha-60°)$; b) $\cos(\alpha+60°)-\cos(\alpha-60°)$.

33. Įrodykite tapatybes:

a) $2(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sqrt{8}\sin(\alpha+45°)$;

b) $2(\sin\alpha-\cos\alpha)=\sqrt{8}\sin(\alpha-45°)$.

34. Pakeiskite sandaugomis šiuos reiškinius:

a) $0{,}5+\cos\alpha$; b) $0{,}5-\cos\alpha$; c) $\cos\alpha+1$; d) $1-\cos\alpha$.

35. Įrodykite tapatybę $\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\operatorname{ctg} 2\alpha$.

36. Apskaičiuokite

$$\cos 95^\circ+\cos 94^\circ+\cos 93^\circ+\cos 85^\circ+\cos 86^\circ+\cos 87^\circ.$$

8. Tangentų sumos (skirtumo) pertvarkymas. Lengvai įsitikiname, kad

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Taigi

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad \text{(XXXII)}$$

Tangentų suma yra lygi duotųjų argumentų sumos sinuso ir tų argumentų kosinusų sandaugos santykiui.

Analogiškai

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad \text{(XXXIII)}$$

Tangentų skirtumas yra lygus duotųjų argumentų skirtumo sinuso ir tų argumentų kosinusų sandaugos santykiui.

Sprendžiant kai kuriuos uždavinius, pavyzdžiui, apie harmoninius svyravimus, reikia pakeisti sandauga šitokius reiškinius:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha.$$

Pažymėkime

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Tada bet kokiems skaičiams a ir b egzistuoja toks φ, kad

$$a=r\cos\varphi \text{ ir } b=r\sin\varphi, \qquad (1)$$

todėl duotąją sumą galima užrašyti šitaip:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=r(\cos\varphi\sin\alpha+\sin\varphi\cos\alpha)=r\sin(\alpha+\varphi). \qquad (2)$$

Žinodami r, iš (1) lygybių rasime φ:

$$\cos\varphi=\frac{a}{r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{b}{r}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

arba

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}.$$

1 pavyzdys. Reiškinį $3\sin\alpha-\sqrt{7}\cos\alpha$ pakeiskime sandauga.

Sprendimas.

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+(-\sqrt{7})^2}=4,$$

$$\cos\varphi=\frac{3}{4},\quad \sin\varphi=-\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Atsižvelgę į sinuso ir kosinuso ženklus, lentelėje randame $\varphi\approx-41^\circ 24'$; taigi, remdamiesi (2) formule,

$$3\sin\alpha-\sqrt{7}\cos\alpha=4\sin(\alpha+\varphi)\approx 4\sin(\alpha-41^\circ 24').$$

2 pavyzdys. Tašką M veikia Oy ašies kryptimi jėga F_1, sukelianti harmoninį svyravimą $y=2\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$, ir kartu veikia jėga F_2, taip pat sukelianti harmoninį svyravimą $y=3\sin\pi t$. Kaip juda taškas M, veikiamas abiejų jėgų?

Sprendimas. Remiantis mechanikos dėsniais, taškas M svyruoja pagal dėsnį

$$y=2\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\pi t=2\sin\pi t\cos\frac{\pi}{3}+2\cos\pi t\sin\frac{\pi}{3}+$$

$$+3\sin\pi t=\left(2\cos\frac{\pi}{3}+3\right)\sin\pi t+\left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)\cos\pi t=$$

$$=4\sin\pi t+\sqrt{3}\cos\pi t.$$

Gautąją sumą pakeičiame sandauga. Gauname

$$r=\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{19};$$

taigi

$$\cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{19}},\quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}},$$

todėl iš lentelių randame:

$$\frac{4}{\sqrt{19}}\approx 0{,}9176,$$

t.y. $\cos\varphi\approx 0{,}9176$, iš čia $\varphi\approx 23^\circ 22'\approx 0{,}4078$ (radiano).

Vadinasi,

$$y=4\sin\pi t+\sqrt{3}\cos\pi t\approx\sqrt{19}\sin(\pi t+0{,}4078).$$

Tai reiškia, kad taškas M, veikiamas jėgų F_1 ir F_2 (išilgai Oy ašies), harmoningai svyruoja tuo pačiu dažniu. Jo svyravimo amplitudė lygi $\sqrt{19}$, pradinė fazė $\varphi\approx 0{,}4078$.

Gautosios trigonometrinių funkcijų sumos ir skirtumo keitimo sandauga formulės yra patogios logaritmuojant reiškinius.

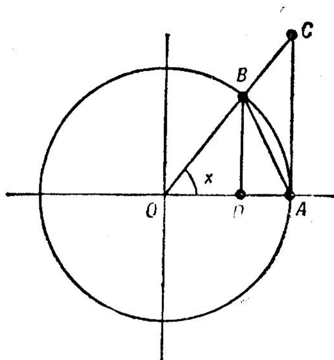
Kad būtų paprasčiau apskaičiuoti trigonometrinių funkcijų sumas ir skirtumus, iš pradžių tos sumos ir skirtumai užrašomi patogiu logaritmavimui pavidalu, t.y. išreiškiami sandaugomis, po to randami logaritmuojant. Tokių formulių yra daug, paprasčiausias jų išnagrinėjome.

§ 32. TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ TOLYDUMAS

1. Vienos nelygybės įrodymas. Įrodysime, kad

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad (1)$$

kiekvienam $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, $x \neq 0$. Pradžioje imkime $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Nubrėžkime vienetinį skritulį ir tokį kampą AOB, kad $x = \widehat{AOB}$ (105 pav.); iš taško B nuleidę statmenį į spindulį OA, gausime $|BD| = \sin x$. Nubrėžkime trikampį $AOC \sim \Delta DOB$; tada $|AC| = \operatorname{tg} x$ $\left(\text{nes } \frac{|AC|}{|OA|} = \frac{\sin x}{\cos x}\right)$.



105 pav.

Turime $S_{\Delta AOB} < S_{\text{išp.} AOB} < S_{\Delta AOC}$; čia S_Δ yra trikampio plotas, $S_{\text{išp}}$ — išpjovos plotas.

Kadangi

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2},$$

$$S_{\text{išp.} AOB} = \frac{x}{2}, \quad S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

tai, palyginę tuos plotus, gauname

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

t.y. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Visus šios nelygybės narius padaliję iš $\sin x$, gausime

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{arba} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Pastebėsime, kad funkcijos $\cos x$ ir $\frac{\sin x}{x}$ yra lyginės, todėl (1) nelygybė yra teisinga ne tik $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, bet ir $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$. Vadinasi, (1) nelygybė yra įrodyta.

2. Trigonometrinių funkcijų tolydumas. Iš 1 skirsnio (1) nelygybės išplaukia, kad

$$|\sin x| < |x|$$

kiekvienam $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $x \neq 0$.

Kadangi $\sin 0 = 0$ ir $|\sin x| \leqslant 1$, tai

$$|\sin x| \leqslant |x| \qquad (1)$$

kiekvienam $x \in R$.

Dabar įrodysime, kad trigonometrinės funkcijos $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ yra tolydžios kiekviename jų apibrėžimo srities taške.

Bet kokiems realiesiems skaičiams x ir x_0 yra teisinga lygybė

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2},$$

iš kurios, remiantis (1), išplaukia nelygybė

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|.$$

Pastaroji nelygybė rodo, kad funkcija $\sin x$ yra tolydi taške x_0.

Analogiškai galima įrodyti, kad funkcija $\cos x$ yra tolydi intervale $x \in]-\infty; +\infty[$.

Remiantis tolydžiųjų funkcijų dalmens tolydumo teorema, funkcijos

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{ir} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

yra tolydžios kiekviename jų apibrėžimo srities taške.

§ 33. TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS

Priminsime išvestinės apibrėžimą:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Rasime sinuso, kosinuso, tangento ir kotangento išvestines.

1. Sinuso išvestinė. Remiantis išvestinės apibrėžimu,

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Skirtumą skaitiklyje pakeisime sandauga pagal formulę

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tada

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Remdamiesi sandaugos ribos teorema, gausime

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Funkcija $\cos x$ yra tolydi, todėl

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=\cos x.$$

Iš lygybės

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{\Delta x}{2}=1$$

ir 1 skirsnio (1) nelygybės išplaukia, kad

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1.$$

Taigi

$$(\sin x)'=\cos x.$$

Kai funkcija yra sudėtinė, gauname formulę

$$(\sin u)'=\cos u\cdot u';$$

čia $u=\varphi(x)$.

1 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=\sin 5x$ išvestinę.
Sprendimas. $(\sin 5x)'=\cos 5x\,(5x)'=5\cos 5x$.

2 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=\sin 3x^2$ išvestinę.
Sprendimas. $(\sin 3x^2)'=\cos 3x^2\,(3x^2)'=6x\cos 3x^2$.

3 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=\sin^3 2x$ išvestinę.
Sprendimas. $(\sin^3 2x)'=3\sin^2 2x\,(\sin 2x)'=$
$=3\sin^2 2x\cos 2x\,(2x)'=6\sin^2 2x\cos 2x$.

2. Kosinuso išvestinė. Remiantis išvestinės apibrėžimu,

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}.$$

Skirtumą skaitiklyje pakeisime sandauga, naudodamiesi formule

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tada

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Kadangi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$$

ir

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\sin x,$$

tai

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

Jei funkcija yra sudėtinė, tai

$$(\cos u)'=-\sin u\cdot u';$$

čia $u=\varphi(x)$.

1 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=\cos 3x$ išvestinę.

Sprendimas. $(\cos 3x)'=-\sin 3x\,(3x)'=-3\sin 3x$.

2 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=\cos 3x^2$ išvestinę.

Sprendimas. $(\cos 3x^2)'=-\sin 3x^2\,(3x^2)'=-6x\sin 3x^2$.

3 pavyzdys. Raskime funkcijos $f(x)=\cos^2 3x$ išvestinę.

Sprendimas. $(\cos^3 3x)'=2\cos 3x\,(\cos 3x)'=$
$=2\cos 3x\,(-\sin 3x)\,(3x)'=-3\sin 6x$.

3. Tangento išvestinė. Sakykime, duota funkcija

$$f(x)=\operatorname{tg}x,\quad x\in R,\quad x\neq\pm\frac{\pi}{2}+\pi n.$$

Remiantis apibrėžimu,

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Pritaikysime formulę

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}.$$

Tada

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

arba

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Taigi

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Jei funkcija yra sudėtinė, tai

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u' = (1 + \operatorname{tg}^2 u) u'.$$

1 pavyzdys.

$$(\operatorname{tg} 3x)' = \frac{1}{\cos^2 3x} (3x)' = \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

2 pavyzdys.

$$(\operatorname{tg}^3 2x)' = 3 \operatorname{tg}^2 2x (\operatorname{tg} 2x)' = 3 \operatorname{tg}^2 2x \frac{1}{\cos^2 2x} (2x)' = 6 \frac{\sin^2 2x}{\cos^4 2x}.$$

3 pavyzdys.

$$[\operatorname{tg}^2 (3x^2 + x)]' = 2 \operatorname{tg} (3x^2 + x) [\operatorname{tg} (3x^2 + x)]' =$$

$$= 2 \operatorname{tg} (3x^2 + x) \frac{1}{\cos^2 (3x^2 + x)} (3x^2 + x)' = 2 (6x + 1) \frac{\sin (3x^2 + x)}{\cos^3 (3x^2 + x)}.$$

4. Kotangento išvestinė. Sakykime, duota funkcija

$$f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad x \in R, \quad x \neq \pi n.$$

Remiantis apibrėžimu,

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Pritaikysime formulę

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Tada

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{\sin x (\cos x)' - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x},$$

t.y.

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

Kai funkcija yra sudėtinė,

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u' = -(1 + \operatorname{ctg}^2 u) u'.$$

1 pavyzdys.

$$(\operatorname{ctg} 4x)' = -\frac{1}{\sin^2 4x}(4x)' = -\frac{4}{\sin^2 4x}.$$

2 pavyzdys.

$$(\operatorname{ctg}^3 5x)' = 3\operatorname{ctg}^2 5x(\operatorname{ctg} 5x)' =$$

$$= 3\operatorname{ctg}^2 5x\frac{-1}{\sin^2 5x}(5x)' = -15\frac{\cos^2 5x}{\sin^4 5x}.$$

3 pavyzdys.

$$(\operatorname{ctg}^5 x^2)' = 5\operatorname{ctg}^4 x^2(\operatorname{ctg} x^2)' =$$

$$= 5\operatorname{ctg}^4 x^2\frac{-1}{\sin^2 x^2}(x^2)' = -10x\frac{\cos^4 x^2}{\sin^6 x^2}.$$

Pratimai

1. Raskite šių funkcijų išvestines:

a) $y=\sin 2x$; b) $y=\sin ax$; c) $y=\cos 3x$;

d) $y=\cos ax$; e) $y=\sin 2x-\cos 3x$; f) $y=x-\cos 2x$;

g) $y=2x^3+3\sin^2 5x$; h) $y=\frac{\sin 3x}{3}$; i) $y=\frac{1-\sin 2x}{2}$; j) $y=\frac{2\cos 3x}{4}$.

2. Raskite išvestines:

a) $y=x\cos x$; b) $y=x\sin x$; c) $x=\sin x\cos x$;

d) $y=\sin 2x\cos 3x$; e) $y=\sin ax\cos bx$; f) $y=\sin^2 x$;

g) $y=\cos^3 x$; h) $y=\cos^2 ax$; i) $y=\sin^n ax$; j) $y=\cos^n ax$.

3. Įrodykite, kad funkcijos

$$y=\sin^2 x+\cos^2 x$$

išvestinė lygi nuliui.

4. Raskite šių funkcijų išvestines:

a) $y=\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 2x$; b) $y=x\operatorname{ctg} x$; c) $y=\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} 3x$;

d) $y=\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{tg}^2 2x$; e) $y=(\sin x+\cos x)^2$;

f) $y=\sin^2 x-\cos^2 x$; g) $y=\operatorname{tg}^2 ax$; h) $y=\sin(2x^2-x)$;

i) $y=\cos^2(x+\pi)$; j) $y=\sin x+\cos 2x+\operatorname{tg} 3x$.

5. Raskite kreivės liestinės duotajame taške krypties koeficientą:

a) $y=\sin x$ taške, kurio abscisė yra π;

b) $y=\cos x$ taške, kurio abscisė yra $\frac{3\pi}{2}$.

6. Panariui diferencijuodami tapatybę $\sin 2x=2\sin x\cos x$, įrodykite formulę $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

7. Raskite šių funkcijų išvestines:

a) $y=3\cos\frac{x}{3}$; b) $y=\frac{1}{2}\sin 3x$; c) $y=\frac{\sin ax}{a}$;

d) $y=x^2\cos(x-1)$; e) $y=\sin(3+2x)+\cos(3+2x)$;

f) $y=2\sin^3 4x$; g) $y=\frac{\operatorname{tg} 3x}{3}$; h) $y=2\operatorname{tg}3x-3\operatorname{tg}2x$;

i) $y=2\operatorname{tg}^3 4x$; k) $y=4\operatorname{ctg}^3 2x$.

8. Raskite kreivės $y=\cos 2x$ tašką, kuriame liestinė yra lygiagreti abscisių ašiai.

9. Raskite antrąsias išvestines šių funkcijų:

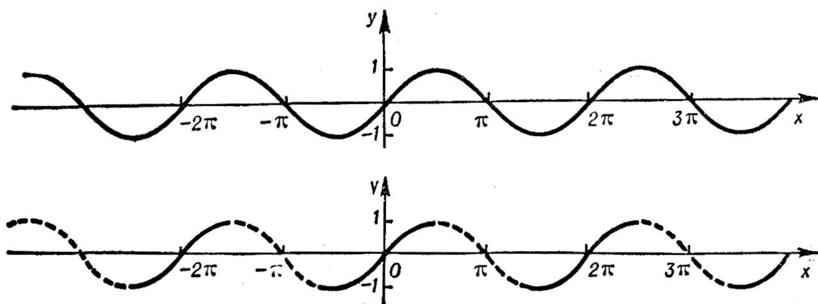
a) $y=\sin x$; b) $y=\sin 2x$; c) $y=\sin ax$; d) $y=\cos x$;

e) $y=\cos 3x$; f) $y=\cos ax$; g) $y=x^2+\sin^2 x$;

h) $y=x^3-\cos^2 x$; i) $y=\cos^2 2x-\sin^2 2x$; j) $y=\sin x\cos x$.

§ 34. ATVIRKŠTINĖS TRIGONOMETRINĖS FUNKCIJOS IR JŲ GRAFIKAI

1. Arksinuso funkcija ir jos grafikas. 32 paragrafe įrodėme, kad sinuso funkcija yra tolydi kiekviename jos apibrėžimo srities taške. Nubraižysime funkcijos $y=\sin x$ grafiką (106 pav.) ir pažymėsime jos monotoniškumo intervalus. Ištisinė linija reiškia, kad tuose intervaluose funkcija didėja, o punktyrinė – kad tuose intervaluose funkcija mažėja.



106 pav.

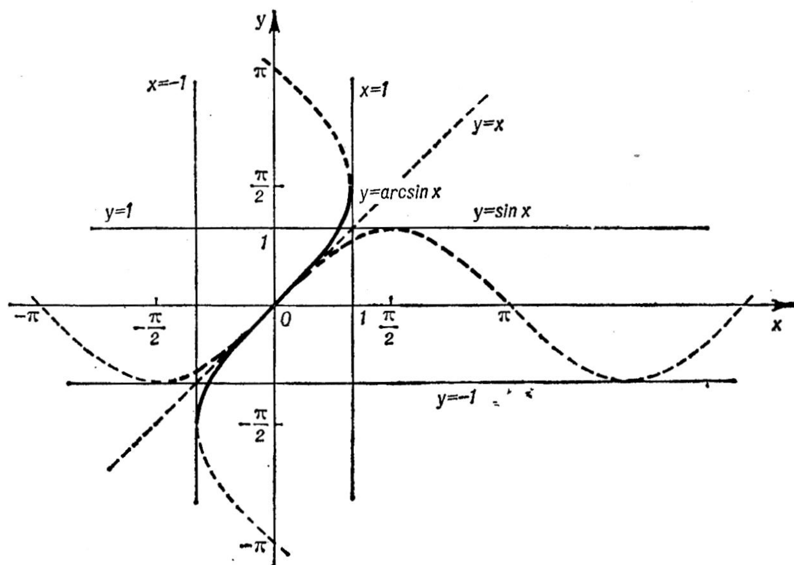
Funkcija $y=\sin x$ atkarpoje $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ didėja ir yra tolydi, todėl ji turi atvirkštinę funkciją, taip pat didėjančią ir tolydžią. Tą funkciją vadinsime *arksinusu* ir žymėsime arcsin.

Remiantis atvirkštinių funkcijų apibrėžimu, arcsin apibrėžimo sritis bus atkarpa $[-1;\ 1]$, o jos reikšmių aibė – atkarpa $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Atkreipsime dėmesį, kad funkcijos

$$y=\arcsin x,\quad x\in[-1;\ 1],$$

grafikas yra simetriškas funkcijos $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, grafikui pirmojo ir trečiojo ketvirčio koordinatinių kampų pusiaukampinės atžvilgiu (107 pav.).



107 pav.

Apskaičiuosime kai kurias arksinuso reikšmes:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1;\ \text{taigi}\ \arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2};$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \text{taigi}\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3};$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \text{taigi}\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4};$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2};\ \text{taigi}\ \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6};$$

$$\sin 0=0;\ \text{taigi}\ \arcsin 0=0;$$

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};\ \text{taigi}\ \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6};$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \text{taigi}\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4};$$

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \text{taigi}\quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3};$$

$$\sin\frac{\pi}{2}=1;\quad \text{taigi}\quad \arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Kitos funkcijos arcsin reikšmės randamos iš lentelių.

1 pavyzdys. Raskime arcsin 0,8192.

Sprendimas. Norėdami rasti arcsin x, iš sinusų lentelių randame kampą, kurio sinusas lygus 0,8192, taigi $0{,}8192\approx\sin 55^\circ$. Išreiškę 55° kampą radianais, gauname $55^\circ\approx 0{,}9599$.

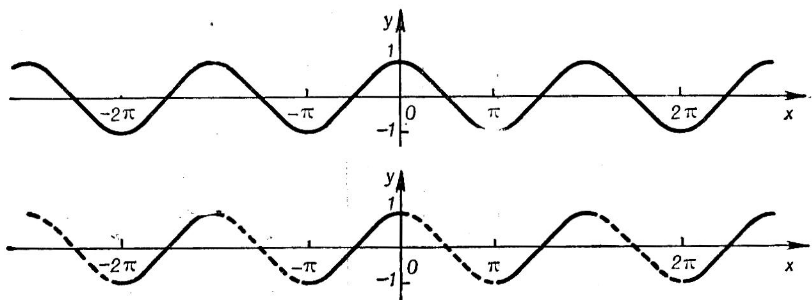
Atsakymas. $\arcsin 0{,}8192\approx 0{,}9599$.

2 pavyzdys. Raskime arcsin 0,6947.

Sprendimas. $\arcsin 0{,}6947\approx 44^\circ$, $44^\circ\approx 0{,}7679$ radianų.

Atsakymas. $\arcsin 0{,}6947\approx 0{,}7679$

2. Arkkosinuso funkcija ir jos grafikas. Žinoma, kad kosinusas yra tolydi funkcija kiekviename apibrėžimo srities taške. Nubraižysime funkcijos $y=\cos x$ grafiką (108 pav.) ir pažymėsime jos monotoniškumo intervalus. Ištisinė linija reiškia, kad tuose intervaluose funkcija didėja, o punktyrinė – kad tuose intervaluose mažėja.



108 pav.

Funkcija $y=\cos x$ atkarpoje $[0;\ \pi]$ yra tolydi ir mažėja, todėl ji turi atvirkštinę funkciją, taip pat tolydžią ir mažėjančią. Tą funkciją vadinsime *arkkosinusu* ir žymėsime arccos.

Remiantis atvirkštinių funkcijų apibrėžimu, arccos apibrėžimo sritis bus atkarpa $[-1;\ 1]$, o reikšmių aibė – atkarpa $[0;\ \pi]$. Pastebėsime, kad funkcijos $y=\arccos x$, $x\in[-1;\ 1]$, grafikas yra simetriškas funkcijos $y=\cos x$, $x\in[0;\ \pi]$, grafikui pirmojo ir trečiojo ketvirčio koordinatinių kampų pusiaukampinės atžvilgiu (109 pav.).

Apskaičiuosime keletą funkcijos arccos reikšmių:

$$\cos 0=1;\quad \text{taigi}\quad \arccos 1=0;$$

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \text{taigi}\quad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6};$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \text{taigi}\quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4};$$

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};\quad \text{taigi}\quad \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3};$$

$$\cos\pi=-1;\quad \text{taigi}\quad \arccos(-1)=\pi;$$

$$\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2};\quad \text{taigi}\quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi;$$

$$\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \text{taigi}\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi;$$

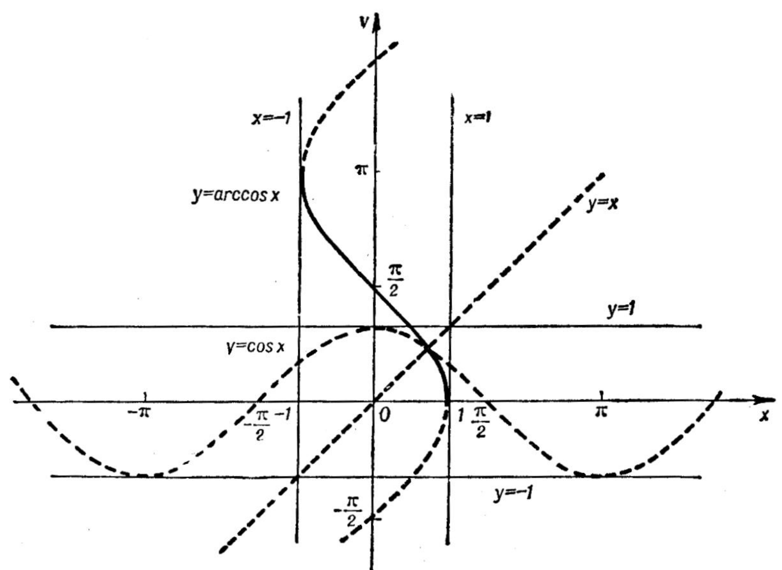
$$\cos\pi=-1;\quad \text{taigi}\quad \arccos(-1)=\pi.$$

Kitos funkcijos arccos reikšmės, kaip ir arcsin reikšmės, yra randamos iš lentelių.

1 pavyzdys. Raskime arccos 0,7986.

Sprendimas. $\arccos 0{,}7986\approx 37°$, $37°\approx 0{,}6458$ radianų.

Atsakymas: $\arccos 0{,}7986\approx 0{,}6458$.



109 pav.

3. Arktangento funkcija ir jos grafikas. Tangento funkcija yra tolydi ir didėjanti intervale $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, todėl ji turi atvirkštinę funkciją, taip pat tolydžią ir didėjančią. Tą funkciją vadinsime arktangentu ir žymėsime arctg.

Remiantis atvirkštinių funkcijų apibrėžimu, arctg apibrėžimo sritis bus intervalas $]-\infty; +\infty[$, o jos reikšmių aibė – intervalas $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Funkcijos

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in R,$$

grafikas yra simetriškas funkcijos $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, grafikui pirmojo ir trečiojo ketvirčio koordinatinių kampų pusiaukampinės atzvilgiu (110 pav.).

Apskaičiuosime keletą arktangento reikšmių:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1; \text{ taigi } \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

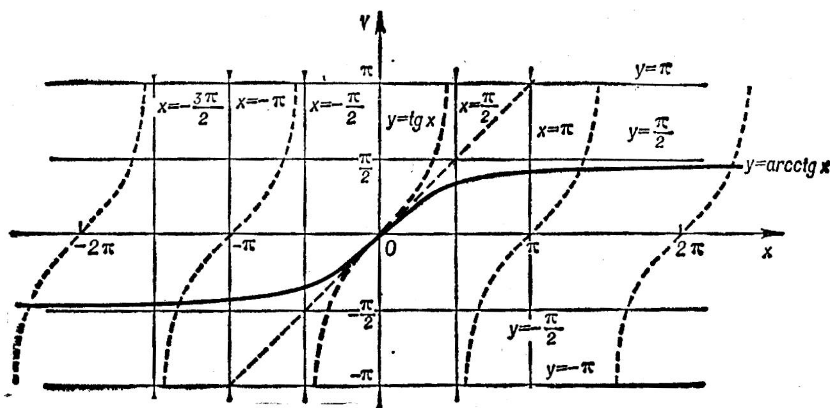
$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1; \text{ taigi } \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}; \text{ taigi } \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}; \text{ taigi } \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \text{ taigi } \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6};$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \text{ taigi } \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$



110 pav.

Kitos arktangento reikšmės randamos iš lentelių.

Pavyzdys. Raskime arctg 2,747.

Sprendimas. $\operatorname{arctg} 2{,}747 \approx 70°$, $70° \approx 1{,}2217$ radianų.

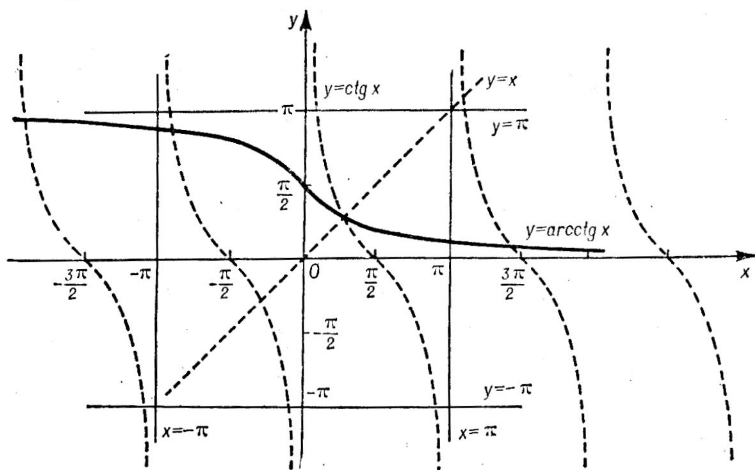
Atsakymas: $\operatorname{arctg} 2{,}747 \approx 1{,}2217$.

4. Arkkotangento funkcija ir jos grafikas. Kotangento funkcija mažėja intervale $]0;\pi[$, be to, kiekviename intervalo $]0;\pi[$ taške ji yra tolydi. Todėl intervale $]0;\pi[$ kotangento funkcija turi atvirkštinę funkciją, taip pat mažėjančią ir tolydžią. Tą funkciją vadinsime *arkkotangentu* ir žymėsime arcctg.

Remiantis atvirkštinių funkcijų apibrėžimu, arcctg apibrėžimo sritis yra intervalas $]-\infty; +\infty[$, o jos reikšmių aibė – intervalas $]0;\pi[$. Funkcijos

$$y=\operatorname{arcctg} x, \quad x\in R,$$

grafikas pavaizduotas 111 paveiksle. Tas grafikas yra simetriškas funkcijos $y=\operatorname{ctg} x$ grafikui I ir III ketvirčio koordinatinių kampų pusiaukampinės atžvilgiu.



111 pav.

Apskaičiuosime keletą arkkotangento reikšmių:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1; \quad \text{taigi} \quad \operatorname{arcctg} 1=\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1; \quad \text{taigi} \quad \operatorname{arcctg}(-1)=-\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \text{taigi} \quad \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \text{taigi} \quad \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}; \quad \text{taigi} \quad \operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6};$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}; \quad \text{taigi} \quad \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{6}.$$

Kitos arkkotangento reikšmės randamos iš lentelių.

Pavyzdys. Raskime arcctg 2,246.

Sprendimas. arcctg 2,246 ≈ 24°, 24° ≈ 0,4189 radianų.

Atsakymas. arcctg 2,246 ≈ 0,4189.

Pratimai

1. Raskite:

a) arcsin 0,2419; b) arcsin 0,4067; c) arcsin 0,5592;

d) arcsin 0,7547; e) arcsin 0,9026; f) arcsin 0,8039.

2. Raskite:

a) arccos 0,9962; b) arccos 0,9659; c) arccos 0,9391;

d) arccos 0,8652; e) arccos 0,8141; f) arccos 0,7011.

3. Raskite:

a) arctg 0,1853; b) arctg 0,3443; c) arctg 0,3739;

d) arctg 2,050; e) arctg 5,145; f) arctg 7,596

4. Raskite:

a) arcctg 7,269; b) arcctg 6,691; c) arcctg 4,390;

d) arcctg 4,511; e) arcctg 0,5774; f) arcctg 0,2586.

5. Arksinuso išvestinė. Funkcija

$$y = \arcsin x \qquad (1)$$

yra atvirkštinė funkcijai

$$x = \sin y, \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (2)$$

(1) funkcijos išvestinę rasime, remdamiesi atvirkštinės funkcijos diferencijavimo taisykle:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Dabar $\cos y$ išreikšime x funkcija. Kadangi

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y},$$

tai, atsižvelgę į (2) lygybę, gausime

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Prieš šaknį reikia rašyti ženklą +, nes $\cos y$ intervale $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ yra teigiamas.

Taigi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Jei funkcija yra sudėtinė, tai

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

čia u yra x funkcija.

1 pavyzdys. Duota funkcija $y=\arcsin\sqrt{x}$. Raskime jos išvestinę.
Sprendimas.

$$(\arcsin\sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}.$$

2 pavyzdys. Duota funkcija $y=x^3\arcsin x$. Raskime jos išvestinę.
Sprendimas.

$$y' = (x^3)'\arcsin x + (\arcsin x)'\,x^3 = 3x^2\arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. Arkkosinuso išvestinė. Funkcija

$$y=\arccos x \tag{3}$$

yra atvirkštinė funkcijai

$$x=\cos y,\quad y\in[0;\ \pi]. \tag{4}$$

(3) funkcijos išvestinę rasime, remdamiesi atvirkštinės funkcijos diferencijavimo taisykle:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y}.$$

Dabar $\sin y$ išreikšime x funkcija. Kadangi

$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y},$$

tai, atsižvelgę į (4), turėsime

$$\sin y = \sqrt{1-x^2}.$$

Prieš šaknį reikia rašyti ženklą $+$, nes $\sin y$ intervale $]0;\pi[$ yra teigiamas.

Taigi

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Kai funkcija yra sudėtinė, ta formulė pasikeičia šitaip:

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

1 pavyzdys. Duota funkcija $y=\arccos x^3$. Raskime jos išvestinę.
Sprendimas.

$$(\arccos x^3)'=-\frac{(x^3)'}{\sqrt{1-x^6}}=-\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

2 pavyzdys. Duota funkcija $y=(\arccos x)^3$. Raskime jos išvestinę.
Sprendimas.

$$y'=3(\arccos x)^2(\arccos x)'=-\frac{3\arccos x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

7. Arktangento išvestinė. Funkcija

$$y=\operatorname{arctg} x \qquad (5)$$

yra atvirkštinė funkcijai

$$x=\operatorname{tg} y,\ y\in\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[. \qquad (6)$$

(5) funkcijos išvestinę rasime, remdamiesi atvirkštinės funkcijos diferencijavimo taisykle:

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\cos^2 y.$$

Dabar $\cos^2 y$ išreikšime x funkcija. Iš (6) lygybės išplaukia, kad $x^2=\operatorname{tg}^2 y$, arba $1+x^2=1+\operatorname{tg}^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}$.
Iš paskutinės lygybės

$$\cos^2 y=\frac{1}{1+x^2}.$$

Taigi

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Jei funkcija yra sudėtinė, tai

$$(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}.$$

1 pavyzdys. Duota funkcija $y=\operatorname{arctg}(x^2-3)$. Raskime jos išvestinę.
Sprendimas.

$$y'=\frac{1}{1+(x^2-3)^2}(x^2-3)'=\frac{2x}{x^4-6x^2+10}.$$

2 pavyzdys. Duota funkcija $y=(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^3$. Raskime jos išvestinę.
Sprendimas.

$$y'=3(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2(\operatorname{arctg}\sqrt{x})'=$$

$$=\frac{3(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})'=\frac{3(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2}{2(1+x)\sqrt{x}}.$$

8. Arkkotangento išvestinė. Funkcija

$$y = \operatorname{arcctg} x \tag{7}$$

yra atvirkštinė funkcijai

$$x = \operatorname{ctg} y, \quad y \in]0;\ \pi[. \tag{8}$$

(8) funkcijos išvestinę rasime, remdamiesi atvirkštinės funkcijos diferencijavimo taisykle:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y.$$

Dabar $\sin^2 y$ išreikšime x funkcija. Iš (8) lygybės išplaukia, kad

$$x^2 = \operatorname{ctg}^2 y$$

arba

$$1 + x^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}.$$

Iš paskutinės gauname: $\sin^2 y = \frac{1}{1+x^2}$.

Taigi

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Kai funkcija yra sudėtinė,

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

1 pavyzdys. Duota funkcija

$$y = \operatorname{arcctg} x^3.$$

Raskime jos išvestinę.

Sprendimas.

$$y' = -\frac{1}{1+(x^3)^2}(x^3)' = -\frac{3x^2}{1+x^6}.$$

2 pavyzdys. Duota funkcija $y = \operatorname{arctg} \frac{3x}{1+x^2}$. Raskime jos išvestinę.

Sprendimas.

$$y' = -\frac{1}{1+\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)^2}\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{1+\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)^2} \quad \frac{3(1+x^2)-2x\cdot 3x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{3(1+x^2)-6x^2}{x^4+11x^2+1} = \frac{3(x^2-1)}{x^4+11x^2+1}.$$

5. Raskite išvestines šių funkcijų:

a) $y=\arcsin 7x$; b) $y=\arcsin ax$; c) $y=m\cdot\arcsin nx$.

6. Raskite funkcijos $y=\arcsin x^2$ išvestinę.

7. Raskite funkcijos $y=\arcsin x^{-\frac{1}{2}}$ išvestinę.

8. Raskite funkcijos $y=\arcsin\frac{2x^3}{1+x^6}$ išvestinę.

9. Įrodykite, kad $(\arcsin x)'+(\arccos x)'=0$.

10. Raskite y', kai $y=x^2\arcsin x$.

11. Raskite išvestines šių funkcijų:

a) $y=\arccos 4x$; b) $y=\arccos ax$; c) $y=m\cdot\arccos nx$.

12. Raskite funkcijos $y=\arccos x^2$ išvestinę.

13. Įrodykite, kad $(\arccos x^{-1})'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

14. Raskite funkcijos $y=x^2\arccos x$ išvestinę.

15. Raskite y', kai $y=\arcsin x+\arccos x$.

16. Įrodykite, kad $y'=\frac{6}{x^2+9}$, kai $y=\arccos\frac{9-x^2}{9+x^2}$.

17. Raskite išvestines šių funkcijų:

a) $y=\operatorname{arctg} 3x$; b) $y=\operatorname{arctg} mx$; c) $y=m\operatorname{arctg} nx$.

18. Įrodykite, kad $(\operatorname{arctg} x)'+(\operatorname{arcctg} x)'=0$.

19. Raskite y', kai $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

20. Raskite funkcijos $y=x^2\operatorname{arctg} x^2$ išvestinę.

21. Raskite y', kai $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x^2-1}$

22. Raskite funkcijos $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ išvestinę.

23. Raskite išvestines šių funkcijų:

a) $y=\operatorname{arcctg} 2x$; b) $y=\operatorname{arctg} nx$; c) $y=m\operatorname{arcctg} nx$.

24. Raskite y', kai $y=\operatorname{arctg} x^{-1}$.

25. Raskite funkcijos $y=(\operatorname{arctg} 2x)^2$ išvestinę.

26. Raskite y', kai $y=x^2\operatorname{arcctg} x$.

27. Įrodykite, kad $\left(\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}$.

28. Raskite funkcijos $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{2x}{1+x^2}$ išvestinę.

29. Raskite y', kai

$y=\arcsin 2x+\operatorname{arctg} 3x+\arccos 2x+\operatorname{arcctg} 3x$.

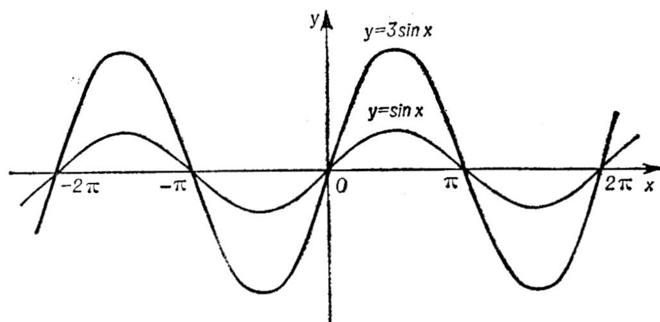
§ 35. ELEMENTARIOS TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ GRAFIKŲ TRANSFORMACIJOS

Susipažinsime su trigonometrinių funkcijų grafikų transformacijomis, nagrinėdami konkrečius pavyzdžius.

1. Funkcijos $y=k\sin x$ grafikas. Sakykime, duotos dvi funkcijos $y=\sin x$ ir $y=3\sin x$. Nubraižysime tų funkcijų grafikus viename brė-

žinyje (112 pav.) Lengva pastebėti, kad, imant tą pačią x reikšmę, funkcijos $y=3\sin x$ grafiko ordinatės modulis yra tris kartus didesnis už funkcijos $y=\sin x$ grafiko ordinatės modulį. Galima sakyti, kad funkcijos $y=3\sin x$ grafikas gaunamas, ištempus funkcijos $y=\sin x$ grafiką išilgai ordinačių ašies.

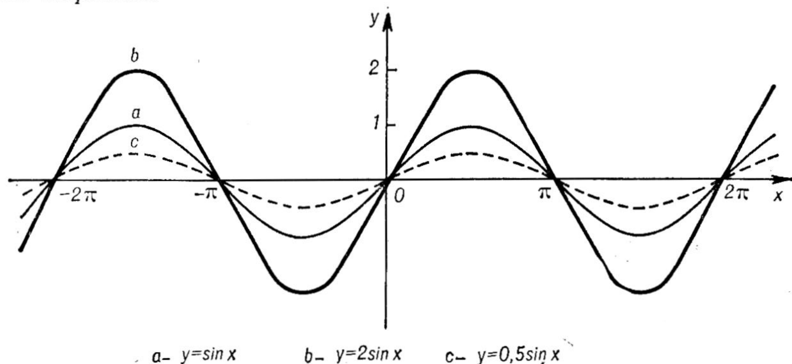
Apskritai funkcijos $y=k\sin x$, $k>0$, grafikas yra gaunamas iš funkcijos $y=\sin x$ grafiko, pastarąjį ištempus k kartų išilgai ordinačių ašies. Jeigu



112 pav.

$k<0$, tai funkcijos $y=k\sin x$ grafikas yra simetriškas abscisių ašies atžvilgiu funkcijos $y=-k\sin x$ grafikui.

Nagrinėjant harmoninius svyravimus, skaičius $|k|$ vadinamas *svyravimo amplitude*.



113 pav.

113 paveiksle pavaizduoti funkcijų

a) $y=\sin x$; b) $y=2\sin x$; c) $y=0{,}5\sin x$

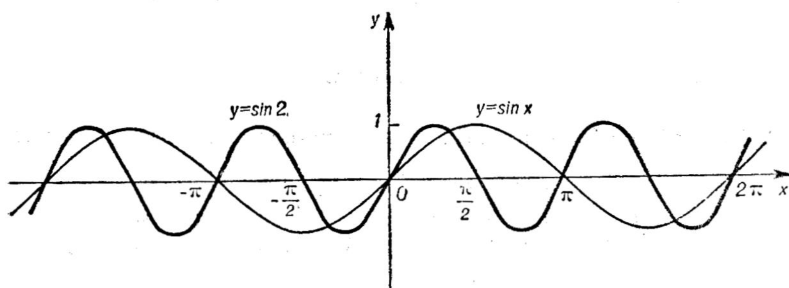
grafikai.

2. Funkcijos $y=\sin ax$ grafikas. Sakykime, duotos dvi funkcijos $y=\sin x$ ir $y=\sin 2x$. Tų funkcijų grafikus nubraižysime viename brėžinyje (114 pav.). Galima sakyti, kad funkcijos $\sin 2x$ grafikas yra gaunamas, suspaudus funkcijos $\sin x$ grafiką išilgai abscisių ašies.

Bendruoju atveju tokią sinusoidės transformaciją galima užrašyti šitaip:

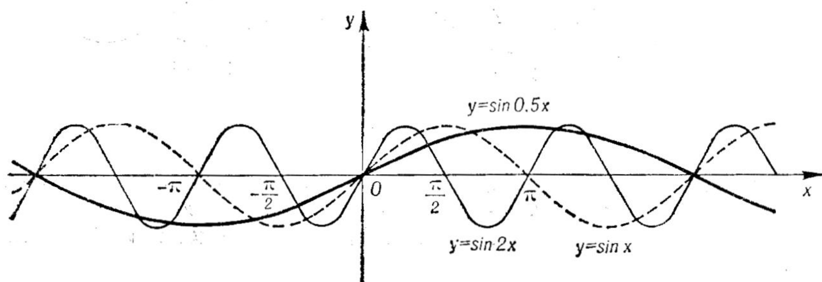
$$y=\sin ax.$$

Apskritai funkcijos $y=\sin ax$, $a>0$, grafikas yra gaunamas iš funkcijos $y=\sin x$ grafiko, pastarąjį suspaudus (ištempus) a kartų išilgai abscisių ašies. Jeigu $a<0$, tai funkcijos $y=\sin ax$ grafikas yra simetriškas abscisių ašies atžvilgiu funkcijos $y=\sin(-a)x$ grafikui.



114 pav.

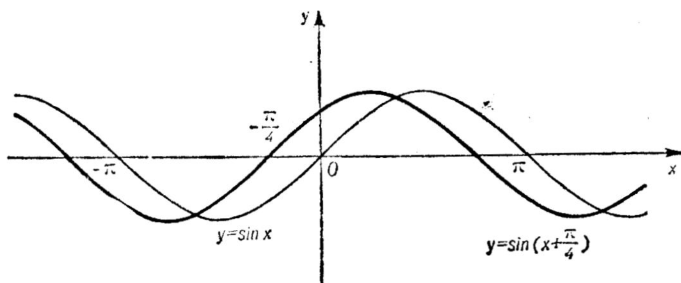
Nagrinėjant harmoninius svyravimus, skaičius a dažnai žymimas ω ir vadinamas *periodu.* 115 paveiksle pavaizduoti funkcijų $y=\sin x$, $y=\sin 0{,}5\,x$, $y=\sin 2x$ grafikai.



115 pav.

3. Funkcijos $y=\sin(x+\varphi_0)$ grafikas. Sakykime, duotos dvi funkcijos: $y=\sin x$ ir $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Nubraižykime tų funkcijų grafikus (116 pav.). Galima sakyti, kad funkcijos $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ grafikas yra gaunamas, lygiagrečiai pastūmus sinusoidę $y=\sin x$ išilgai abscisių ašies į kairę ilgio $\frac{\pi}{4}$ atkarpa.

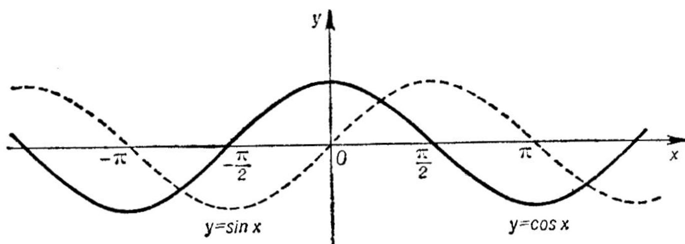
Bendruoju atveju sinusoidė $y=\sin(x+\varphi_0)$ gaunama iš sinusoidės $y=\sin x$, pastarąją lygiagrečiai pastūmus išilgai abscisių ašies ilgio $|\varphi_0|$ atkarpa į kairę, kai $\varphi_0>0$, ir į dešinę, kai $\varphi_0<0$.



116 pav.

Anksčiau buvo kalbėta, kad funkcijos $y=\cos x$ grafikas yra sinusoidė, pastumta išilgai abscisių ašies į kairę ilgio $\frac{\pi}{2}$ atkarpa (117 pav.).

4. Funkcijos $y=k\sin(ax+\varphi_0)$ grafikas. Laikysime, kad $k\neq0$ ir $a\neq0$, nes, jeigu $k=0$, tai $y=0$ (abscisių ašis), o jeigu $a=0$, tai $y=\text{const}$ (tiesė, lygiagreti abscisių ašiai).



117 pav.

Funkcijos $y=k\sin(ax+\varphi_0)$ grafikas vadinamas *sinusoide, deformuota spaudžiant, tempiant ir stumiant išilgai koordinačių ašių.*

Pavyzdys. Žodžiais nusakykime, kaip atrodo funkcijos $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ grafikas.

Sprendimas. Tai yra deformuota sinusoidė. Duotąją funkciją užrašykime šitaip:

$$y=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right).$$

Kadangi $k=3>0$, tai sinusoidė yra ištempta išilgai ordinačių ašies; kadangi $a=2>0$, tai sinusoidė suspausta išilgai abscisių ašies; kadangi $\varphi_0=\frac{\pi}{12}>0$, tai sinusoidė pastumta išilgai abscisių ašies į kairę ilgio $\frac{\pi}{12}$ atkarpa.

Apskritai, norint nubraižyti funkcijos

$$y=k\sin(ax+\varphi_0),\quad a\neq0,$$

grafiką, ją reikia užrašyti šitaip:

$$y=k\sin a\left(x+\frac{\varphi_0}{a}\right).$$

Tada nesunku pastebėti, kad tos funkcijos grafikas yra gaunamas iš funkcijos $y=k\sin ax$ grafiko, pastarąjį pastūmus išilgai abscisių ašies ilgio $\frac{|\varphi_0|}{|a|}$ atkarpa į kairę, kai $\frac{\varphi_0}{a}>0$, ir į dešinę, kai $\frac{\varphi_0}{a}<0$.

5. Funkcijos $y=k\cos(ax+\varphi_0)$ grafikas. Priminsime, kad funkcijos $y=\cos x$ grafikas yra sinusoidė, pastumta išilgai abscisių ašies į kairę ilgio $\frac{\pi}{2}$ atkarpa, nes

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Todėl funkcijos $y=k\cos(ax+\varphi_0)$ grafikas yra gaunamas iš funkcijos $y=k\sin(ax+\varphi_0)$ grafiko, pastarąjį pastūmus išilgai abscisių ašies ilgio $\frac{\pi}{2|a|}$ atkarpa į kairę, kai $a>0$, ir į dešinę, kai $a<0$.

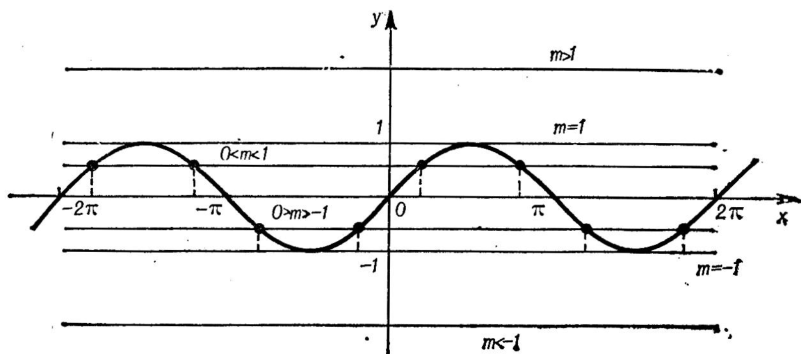
§ 36. TRIGONOMETRINĖS LYGTYS

1. Paprasčiausios trigonometrinės lygtys. Paprasčiausiomis laikomos šios trigonometrinės lygtys:

$$\sin x=m,\quad \cos x=m,\quad \operatorname{tg} x=m,\quad \operatorname{ctg} x=m;$$

čia m – duotas skaičius.

Labai svarbu mokėti spręsti šias paprasčiausias lygtis, nes ir bet kokios trigonometrinės lygtys sprendžiant perdirbamos į paprasčiausias.



118 pav.

1. Nagrinėsime lygtį

$$\sin x=m. \tag{1}$$

Kadangi $|\sin x|\leqslant 1$, tai (1) lygtis neturi sprendinių, kai $m>1$ ir $m<-1$ (118 pav.).

Jeigu $m=1$, tai (1) lygtis yra $\sin x=1$, o jos sprendiniai

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k\in Z. \tag{2}$$

Jeigu $m=-1$, tai (1) lygtis yra $\sin x=-1$, o jos sprendiniai

$$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \quad k\in Z. \tag{3}$$

Sakykime, $|m|<1$. Kadangi sinuso periodas yra 2π, tai, norint išspręsti (1) lygtį, užtenka rasti visus jos sprendinius bet kokioje ilgio 2π atkarpoje.

Atkarpą $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ sudaro dvi atkarpos, kuriose sinuso funkcija yra monotoninė: a) atkarpa $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, kurioje funkcija didėja ir reikšmę m įgyja tik vieną kartą; b) atkarpa $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, kurioje funkcija mažėja ir reikšmę m įgyja tik vieną kartą. Atkarpoje $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (remiantis arksinuso apibrėžimu) (1) lygties sprendinys yra $\arcsin m$. Norėdami (1) lygtį išspręsti atkarpoje $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, naudosimės formule

$$\sin x=\sin(\pi-x).$$

Akivaizdu, kad $\pi-x\in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, kai $x\in\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, todėl lygties $\sin(\pi-x)=m$ sprendinys atkarpoje $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ bus

$$\pi-x=\arcsin m,$$

t.y.

$$x=\pi-\arcsin m.$$

Visus (1) lygties sprendinius gausime, prie kiekvieno iš dviejų gautųjų sprendinių pridėję skaičius $2k\pi$, $k\in Z$. Tada

$$x=\arcsin m+2k\pi, \tag{4}$$

$$x=\pi-\arcsin m+2k\pi. \tag{5}$$

Abi sprendinių serijas galima sujungti:

$$x=(-1)^k\arcsin m+\pi k, \quad k\in Z. \tag{6}$$

Iš tikrųjų, kai k yra lyginis, gauname (4) formulę, kai k – nelyginis, gauname (5) formulę.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sprendimas. Remiantis (6), $3x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+k\pi$, $k\in Z$. Kadangi $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, tai $3x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$.

Atsakymas. $x=(-1)^k \frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\sin 2x=-1$.

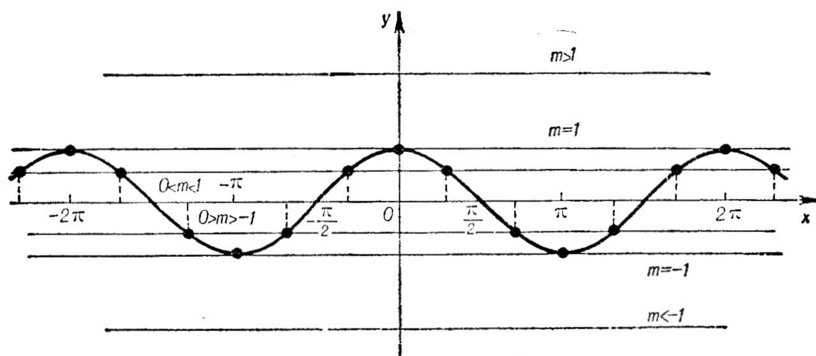
Sprendimas. Remiantis (3) formule, $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k \in Z$.

Atsakymas: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k \in Z$.

2. Nagrinėsime lygtį

$$\cos x = m. \tag{7}$$

Kadangi $|\cos x| \leqslant 1$, tai (7) lygtis neturi sprendinių, kai $m>1$ ir $m<-1$ (119 pav.).



119 pav.

Jeigu $m=1$, tai (7) lygtis yra $\cos x=1$; jos sprendiniai

$$x=2\pi k, \quad k \in Z. \tag{8}$$

Jeigu $m=-1$, tai (7) lygtis yra $\cos x=-1$; jos sprendiniai

$$x=\pi+2\pi k, \text{ t. y. } x=\pi(2k+1), \quad k \in Z. \tag{9}$$

Sakykime, $|m|<1$. Kadangi kosinuso periodas yra 2π, tai, norint išspręsti (7) lygtį, užtenka rasti visus jos sprendinius bet kokioje ilgio 2π atkarpoje.

Atkarpą $[-\pi; \pi]$ sudaro dvi atkarpos, kuriose kosinuso funkcija yra monotoninė: a) atkarpa $[-\pi; 0]$, kurioje funkcija didėja ir reikšmę m įgyja tik vieną kartą; b) atkarpa $[0; \pi]$, kurioje funkcija mažėja ir reikšmę m įgyja tik vieną kartą. Taigi kiekvienoje iš tų dviejų atkarpų (7) lygtis turi po vieną sprendinį. Atkarpoje $[0; \pi]$ (7) lygties sprendinys yra $\arccos m$. Kadangi kosinusas yra lyginė funkcija, tai atkarpoje $[-\pi; 0]$ (7) lygties sprendinys yra $-\arccos m$. (7) lygties sprendiniai atkarpoje $[-\pi; \pi]$ bus skaičiai $\pm\arccos m$.

Norint gauti visus (7) lygties sprendinius, prie kiekvieno gautojo sprendinio reikia pridėti skaičius $2k\pi$, $k \in Z$. Gausime

$$x=\pm\arccos m+2k\pi, \quad k \in Z. \tag{10}$$

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\cos 3x = \frac{1}{2}$.

Sprendimas.

$$3x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} k\pi, \quad k \in Z.$$

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\cos 5x = 0$.

Sprendimas.

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{5} \pi k, \quad k \in Z.$$

5 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\cos 2t = -1$.

Sprendimas.

$$2t = \pi + 2k\pi, \quad k \in Z;$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

3. Nagrinėsime lygtį

$$\operatorname{tg} x = m. \qquad (11)$$

Kadangi tangento periodas yra π, tai, norint rasti visus (11) lygties sprendinius, užtenka rasti jos sprendinius bet kokiame ilgio π intervale. Remiantis arktangento apibrėžimu, (11) lygties sprendinys intervale $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ yra arctg m.

Visus (11) lygties sprendinius rasime, prie gautojo sprendinio pridėję skaičių πk, $k \in Z$. Vadinasi,

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi k, \quad k \in Z. \qquad (12)$$

6 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\operatorname{tg} 3x = -1$.

Sprendimas. Remiantis (12) formule, $3x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k$, $k \in Z$; kadangi $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{3\pi}{4}$, tai $3x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$, t.y. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

7 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\operatorname{tg} x = 14{,}10$.

Sprendimas. Remiantis (12) formule, $x = \operatorname{arctg} 14{,}10 + \pi k$, $k \in Z$. Iš radianinio argumento trigonometrinių funkcijų lentelės randame:

$$x \approx 1{,}50 + \pi k, \quad k \in Z.$$

4. Nagrinėsime lygtį

$$\operatorname{ctg} x = m. \qquad (13)$$

Kotangento funkcijos periodas yra π. Norint gauti visus (13) lygties sprendinius, užtenka rasti jos sprendinius bet kokiame ilgio π intervale. Imkime intervalą $]0; \pi[$. (13) lygties sprendinys tame intervale bus arcctg m (remiantis arkkotangento apibrėžimu).

Visus (13) lygties sprendinius rasime, prie gautojo sprendinio pridėję skaičių πk, $k \in Z$. Vadinasi,

$$x = \operatorname{arcctg} m + \pi k, \quad k \in Z. \qquad (14)$$

8 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\operatorname{ctg} 2x = -1$.

Sprendimas. Remiantis (14) formule, $2x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi k$, $k \in Z$; kadangi $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$, tai $2x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

9 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\operatorname{ctg} 5x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Sprendimas. Remiantis (14) formule, $5x = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k$, $k \in Z$. Kadangi $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, tai $5x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{30} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$.

2. Trigonometrinių lygčių sprendimo pavyzdžiai. Ką tik buvo parodyta, kaip reikia spręsti paprasčiausias trigonometrines lygtis. Pailiustruosime pavyzdžiais, kaip sprendžiamos sudėtingesnės lygtys.

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį $2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0$.

Sprendimas. Reiškinį $\sin^2 x$ pakeisime reiškiniu $1 - \cos^2 x$:

$$2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x = 0, \quad 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0.$$

Tą lygtį išspręsime kosinuso atžvilgiu:

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

Sudarysime dvi paprasčiausias lygtis:

$$\cos x = 2 \text{ ir } \cos x = \frac{1}{2}.$$

Kadangi $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, tai pirmoji lygtis sprendinių neturi. Bendras antrosios lygties sprendinys:

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\cos 2x = \sin^2 x$.

Sprendimas. $\sin^2 x$ pakeisime, remdamiesi formule

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

ir gausime lygtį, kurioje yra tik viena funkcija:

$$\cos 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ arba } 3 \cos 2x = 1;$$

iš čia

$$2x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k.$$

Atsakymas: $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z.$

3 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\sin x \operatorname{tg} x+1=\sin x+\operatorname{tg} x$.

Sprendimas. Visus lygties narius perkelsime į kairiąją pusę:

$$\sin x \operatorname{tg} x+1-\sin x-\operatorname{tg} x=0.$$

Gautosios lygties kairiąją pusę išskaidysime daugikliais:

$$(\sin x-1)(\operatorname{tg} x-1)=0.$$

Kadangi sandauga yra lygi nuliui, tai

$$\text{arba } \sin x-1=0, \text{ arba } \operatorname{tg} x-1=0.$$

Gavome dvi paprasčiausias lygtis:

$$\sin x=1 \text{ ir } \operatorname{tg} x=1.$$

Pirmosios lygties sprendiniai yra

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

Antrosios lygties sprendiniai yra

$$x=\operatorname{arctg} 1+\pi k=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in Z.$$

Atsakymas: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ir $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

Išskirsime atvejį, kai, imant kokią nors argumento reikšmę, bent vienas daugiklis yra lygus nuliui ir bent vienas kitas daugiklis neturi prasmės, – tada ir visa sandauga neturi prasmės. Tokios argumento (nežinomojo) reikšmės nėra lygties sprendiniai. Pavyzdžiui, duota lygtis

$$\operatorname{tg} x \sin 2x=0.$$

Akivaizdu, kad ji ekvivalenti dviem paprasčiausioms lygtims

$$\operatorname{tg} x=0 \text{ ir } \sin 2x=0,$$

kurių sprendiniai yra

$$x=\pi k \text{ ir } x=\frac{\pi n}{2}.$$

Pirmasis daugiklis $\operatorname{tg} x$ neturi prasmės, kai

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi=(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Visos tos x reikšmės priklauso antrosios lygties sprendinių aibei, kai $n=2k+1$ (nelyginis). Tie sprendiniai yra pašaliniai. Kai $n=2k$, antrosios lygties sprendiniai yra ir pirmosios lygties sprendiniai. Taigi duotosios lygties sprendiniai yra

$$x=\pi k.$$

Sprendžiant trigonometrines lygtis, tenka pertvarkyti jose esančius reiškinius. Jeigu, pertvarkius reiškinius, galimų x reikšmių sritis praplatėja, tai gali atsirasti pašalinių sprendinių, o jeigu susiaurėja, tai ir sprendinių aibė gali susiaurėti.

4 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}.$$

Sprendimas. Kadangi

$$\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\frac{2\cos^2 x}{2\cos x}=\cos x,$$

tai lygtį pertvarkome šitaip:

$$\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}, \text{ arba } \frac{\cos x(\sin x-1)}{\sin x}=0.$$

Gavome dvi paprasčiausias lygtis:

$$\cos x=0 \text{ ir } \sin x=1.$$

Jų sprendiniai yra

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ir } x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$$

Antroji sprendinių aibė yra pirmosios poaibis, todėl abi išraiškas galima sujungti į vieną

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

Tame pavyzdyje visi rastieji sprendiniai yra pašaliniai, nes dešinioji duotosios lygties pusė neturi prasmės, kai $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Sprendinių aibė nesusiaurėjo, nes lygtį $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}=\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}$ pakeitus lygtimi $\frac{\cos x(\sin x-1)}{\sin x}=0$, galimų x reikšmių aibė praplatėjo.

Vadinasi, duotoji lygtis sprendinių neturi.

5 pavyzdys. Išspręsime lygtį $5\sin^2 x+3\cos^2 x=4\sin 2x$.

Sprendimas. Reiškinį $\sin 2x$ pakeisime reiškiniu $2\sin x\cos x$:

$$5\sin^2 x-8\sin x\cos x+3\cos^2 x=0.$$

Abi gautosios lygties puses padalysime iš $\cos^2 x$ (įsitikinkite, kad $\cos x\neq 0$):

$$5\operatorname{tg}^2 x-8\operatorname{tg} x+3=0.$$

Pažymėję $\operatorname{tg} x$ raide y, gausime: $5y^2-8y+3=0$; iš čia $y_1=1$ ir $y_2=\frac{3}{5}$, arba $\operatorname{tg} x=1$ ir $\operatorname{tg} x=\frac{3}{5}$. Iš pirmosios lygties $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, o iš antrosios $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi k$.

Atsakymas: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi k$, $k\in Z$.

6 pavyzdys. Išspręskime lygtį $\cos 2x=\cos 6x$.

Sprendimas. Tą lygtį užrašysime šitaip:

$$\cos 2x-\cos 6x=0.$$

Remiantis kosinusų skirtumo formule,

$$-2\sin\frac{2x+6x}{2}\sin\frac{2x-6x}{2}=0$$

arba

$$2\sin 4x\sin 2x=0.$$

Jeigu $\sin 4x=0$, tai $x=\frac{n\pi}{4}$; jeigu $\sin 2x=0$, tai $x=\frac{n\pi}{2}$. Antroji sprendinių serija priklauso pirmajai.

Atsakymas: $x=\frac{n\pi}{4}$, $n\in Z$.

7 pavyzdys. Išspręskime lygtį $7\sin x=3\cos 2x$.

Sprendimas. Kadangi $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, tai duotąją lygtį galima užrašyti šitaip:

$$7\sin x=3(\cos^2 x-\sin^2 x).$$

Reiškinį $\cos^2 x$ pakeitę reiškiniu $1-\sin^2 x$, gausime

$$7\sin x=3(1-\sin^2 x-\sin^2 x)$$

arba

$$7\sin x=3-6\sin^2 x.$$

Pažymėkime $\sin x$ raide y; tada $7y=3-6y^2$. Išsprendę kvadratinę lygtį, rasime

$$y_1=\frac{1}{3},\quad y_2=-\frac{3}{2}.$$

Kadangi $y=\sin x$, tai arba $\sin x=\frac{1}{3}$, arba $\sin x=-\frac{3}{2}$.

Išsprendę paprasčiausią lygtį $\sin x=\frac{1}{3}$, gausime

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Lygtis $\sin x=-\frac{3}{2}$ sprendinių neturi, nes $|\sin x|\leqslant 1$ kiekvienam x.

8 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-2,$$

Sprendimas. Remiantis sumos tangento formule,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}x}=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}.$$

Dabar duotąją lygtį galima užrašyti šitaip:

$$\operatorname{tg}x+\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=-2$$

Pažymėję $\operatorname{tg}x$ raide y, gausime

$$y+\frac{1+y}{1-y}=-2.$$

Išsprendę gautąją algebrinę lygtį, rasime

$$y=\pm\sqrt{3}.$$

Jeigu $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$, tai $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$; ieigu $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$, tai $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k$ (čia k – bet koks sveikasis skaičius). Abi sprendinių aibes galima užrašyti viena formule

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in Z.$$

9 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$(1+\sin 2x)(1-\operatorname{tg}x)=1+\operatorname{tg}x.$$

Sprendimas. Kadangi $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, tai

$$(1+\sin 2x)\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=1+\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Padauginkime abi lygties puses iš $\cos x$:

$$(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=\cos x+\sin x.$$

Abi gautosios lygties puses padauginę iš $\cos x+\sin x$, gausime

$$(1+\sin 2x)(\cos^2 x-\sin^2 x)=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x,$$

arba

$$(1+\sin 2x)\cos 2x=1+\sin 2x.$$

Taigi

$$(1+\sin 2x)(\cos 2x-1)=0.$$

Jeigu $1+\sin 2x=0$, tai $2x=\frac{3}{2}\pi+2\pi k$, $x=\frac{3}{4}\pi+\pi k$ $k=0$ ± 1, ± 2, ... Jeigu $\cos 2x=1$, tai $2x=2\pi k$, $x=\pi k$, $k=0$, ± 1, ± 2, ...

Atsakymas: $x=\frac{3}{4}\pi+\pi k$, $x=\pi k$, $k\in Z$.

Pratimai

Išspręskite lygtis:

1. $2\cos^2 x+4\sin^2 x=3.$

2. $2(\cos^2 x-\sin^2 x)=1.$

3. $\sin^4 x-\cos^4 x=0{,}5.$

4. $\sin x-\cos x=0.$

5. $3\sin^2 x-\cos^2 x=0.$

6. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0.$

7. $2\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)+0{,}75=\cos\alpha.$

8. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{ctg} x.$

9. $\sin^2 x-\cos^2 x=0{,}5.$

10. $\sin 3x+\sin x=0.$

11. $\sin 5x=\sin x.$

12. $\cos 4x+\cos x=0.$

13. $\cos 2x=\cos x.$

14. $\cos 2x=-\cos 6x.$

15. $\cos 2x-\cos 6x=0.$

16. $\cos 3x=\sin x.$

17. $\sin x+\cos x=1.$

18. $\operatorname{tg} 5x=\operatorname{tg} 3x.$

19. $\operatorname{tg} 4x=\operatorname{tg} 2x.$

20. $1-\operatorname{tg}^2 x=2\operatorname{tg} x.$

21. $1-4\sin^2 x+\sin^2 2x=0.$

22. $\cos 2x=2\sin^2 x.$

23. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 2x.$

24. $\operatorname{tg} 2x-3\operatorname{tg} x=0.$

25. $1-\cos x=\sin^2\frac{x}{2}.$

26. $1-\cos x=\sin x.$

27. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg} x+2=0.$

28. $7\sin x-3\cos 2x=0.$

29. $4\sin^2 x+2\cos^2 x-3\sin 2x=0.$

30. $\cos 4x\cos 2x=\cos 5x\cos x.$

ATSAKYMAI

I SKYRIUS

1. Teisingas užrašas yra $3 \cdot 10^5$ km/s. **2.** Skirtumo nėra.

3. Pirmuoju atveju skaitmenys 0, 4, 0 yra tikslūs, skaitmenys 3 ir 5 — abejotini; antruoju atveju visi skaitmenys yra tikslūs; trečiuoju atveju skaitmenys 5, 1, 3 — tikslūs, o skaitmuo 7 — abejotinas; $0{,}404 \pm 0{,}003$; $3{,}20 \pm 0{,}005$; 5137 ± 10.

4. $3{,}141 \pm 0{,}0006$; $3{,}1415 \pm 0{,}0001$.

5. $1{,}7320 \pm 0{,}00006$. **6.** $h = 0{,}005$

7. $h = 300$. **10.** 0,00004; 0,00007.

11. $h = 0{,}05$; $E = 0{,}003$. **12.** $h = 0{,}0001$; $E = 0{,}00002$.

13. 28,5; $E = 0{,}03$ **14.** $E = 0{,}02$.

15. $E = 0{,}004$. **16.** Su penkiais reikšminiais skaitmenimis.

17. $D = 0{,}0811 \pm 0{,}0005$ cm.

18. $q = 979{,}9$ cm/s^2; $h_g = 0{,}5$ cm/s^2, $E_g = 0{,}0005$.

19. $w = 1{,}3 \pm 0{,}12\ s^{-1}$ **20.** $m = 4{,}0 \pm 0{,}5$ t.

II SKYRIUS

§ **5.1.** Keturi spinduliai: $[AX)$, $[AY)$, $[BX)$ ir $[BY)$; viena atkarpa $[AB]$; viena tiesė (XY).

2. a) (XY); b) (XY); c) $(XY) \setminus]AB[$; d) (XY); e) $[BY)$; f) $[AX)$.

3. a) A; b) B; c) $\varnothing$; d) $[AB]$; e) $[AY)$; f) $[BX)$.

4. a) $[BY)$; b) $[AX)$; c) (XY); d) (XY); e) (XY).

5. a) A; b) B; c) $[AX)$; d) $[AY)$; e) $[AB]$.

6. C, $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$, C, A, C.

7. $\{1; 2\}$, B, $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$, Z, N, $\{1, 2\}$.

8. $\varnothing$, $\{0{,}35\}$, $\{12{,}5\}$, $\{0{,}35; 12{,}5\}$.

10. $N \subset Z \subset P \subset R \sim K$.

11. $M = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$, $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $F = \{3; 6; 9; 12; \ldots\}$.

12. Statmuo, einantis per atkarpos $[AB]$ vidurį.

13. Apskritimo, einančio per taškus A, B, C, centras.

14. Kampo BAC pusiaukampinė.

15. a) F_4; b) F_1; c) $\varnothing$ **16.** b); c); d).

17. $A \cap B = B$, $A \cup B = A$, $A \setminus B = \{7\}$, $A \times B = \{(7; 8), (8; 8), (9; 8), (7; 9), (8; 9), (9; 9)\}$; $A_1 \cup B_1 = A_1 \cap B_1 = A_1 = B_1$, $A_1 \setminus B_1 = \varnothing$, $A_1 \times B_1 = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2)\}$; $A_2 \cap B_2 = \varnothing$, $A_2 \cup B_2 = \{1; 2; 3; 4\}$, $A_2 \setminus B_2 = \{1; 2\}$, $A_2 \times B_2 = \{(1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4)\}$.

18. A; B; skritulio taškų, nepriklausančių kvadratui, aibė; $\varnothing$.

19. **2.**

§ **6.** **2.** 1), 5), 6), 7), 8); 1), 6), 8) teisingi; 5), 7) klaidingi.

3. $A \subset B$, $B \supset A$. **4.** $K \subset \pi$.

5. a) $A=P$, $B\subset A$, $-0,5\in B$; b); c).
10. Teisingas, teisingas, klaidingas.

13. a) $((a⋮2)\wedge(a⋮3))\Rightarrow(a⋮6)$; b) $((a⋮2)\wedge\overline{(a⋮6)})\Rightarrow\overline{(a⋮3)}$.

16. Andrejus – pirmą, Grigorijus – antrą, Borisas – trečią.
17. Juoda. **20.** $\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$.

§7. **1.** a) $A\subset B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$; b) $A\subset B$, $(A\cup B)\supset(A\cap B)$.
2. $(A\in a)\wedge\overline{(A\in b)}$.
4. a) Pakankama; b) pakankama; c) būtina ir pakankama; d) būtina ir pakankama.

§ 8.1. Natūriniai skaičiai: 5; 14; 90; sveikieji skaičiai: -90; -5; 0; 5; 14; 90; trupmeniniai skaičiai: $-12,3$; $-\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}$; $18\frac{2}{5}$; racionalieji skaičiai: visi aibės A skaičiai; neigiami skaičiai: -90; $-12,3$; -5; $-\frac{1}{6}$; neneigiami skaičiai: 0; $\frac{3}{4}$; 5; 14; $18\frac{2}{5}$; 90.

2. a) $\{3;\ 4;\ 8;\ 9;\ 16;\ 21\}$; b) $\{-35;\ -21;\ -4;\ 0;\ 3;\ 4;\ 8;\ 9;\ 16;\ 21\}$; c) $\left\{-32\frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right\}$; d) $\{-35;\ -21;\ 3;\ 9;\ 21\}$; e) $\{-4;\ 0;\ 4;\ 8;\ 16\}$; f) $\left\{-35;\ -32\frac{1}{3};\ -21;\ -4\right\}$.

3. $N\subset Z_0$, $N\subset Z$, $Z\subset Q$.

6. a) $\frac{-20}{1}$; $\frac{-12}{1}$; $\frac{0}{1}$; $\frac{5}{1}$; $\frac{36}{1}$; $\frac{75}{1}$; b) $\frac{-29}{7}$; $\frac{-23}{10}$; $\frac{-13}{9}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{36}{7}$; $\frac{115}{13}$.

7. a) $\frac{-9}{1}$; $\frac{23}{15}$; $\frac{27}{7}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{-21}{2}$; b) $\frac{-23}{2}$; $\frac{3}{1}$; $\frac{-20}{1}$; $\frac{-48}{9}$; $\frac{1}{2}$.

8. a) $\bar{5},000\ldots$; b) $4,000\ldots$; c) $\bar{1},8000\ldots$; d) $\overline{15},07000\ldots$; e) $\bar{1},7000\ldots$; f) $5,3000\ldots$; g) $0,875000\ldots$; h) $0,142857142\ldots$; i) $0,3666\ldots$

9. a) $\bar{1},444\ldots$; b) $2,666\ldots$; c) $\bar{1},7666\ldots$; d) $2,555\ldots$; e) $3,636363\ldots$

10. a) $\frac{-3}{7}$; $\frac{28}{11}$; $\frac{-5}{3}$; $\frac{6}{1}$; $\frac{-17}{10}$; $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{9}$; b) $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $0,12122122212222\ldots$

11. a) $2,39748\ldots<2,39784\ldots$; b) $2,3874\ldots>0,3874\ldots$; c) $1,2030\ldots>>1,2003\ldots$; d) $4,8181\ldots>4,1881\ldots$; e) $17,2\ldots<\frac{87}{5}$; f) $-\frac{3}{7}<<0,428\ldots$; g) $-10,003\ldots>-10,030\ldots$; h) $-0,025\ldots>>-0,052\ldots$

12. a) 0,37 ir 0,38; b) 1,49 ir 1,50; c) $-4,57$ ir $-4,56$; d) $-3,74$ ir $-3,73$; e) 2,23 ir 2,24; f) $-2,24$ ir $-2,23$; g) 2,64 ir 2,65; h) $-2,65$ ir $-2,64$; i) 0,66 ir 0,67; j) $-0,67$ ir $-0,66$; k) 2,14 ir 2,15; l) $-2,15$ ir $-2,14$.

18. a) Pirmasis labiau į kairę; b) pirmasis labiau į kairę; c) antrasis labiau į kairę; d) sutampa; e) antrasis labiau į kairę.

19. a) Antrasis; b) pirmasis; c) pirmasis; d) antrasis; e) antrasis.

20. a) $\{-2;\ 2\}$; b) $[-3;\ 3]$; c) $]-\infty;\ -8]$ ir $[8;\ +\infty[$; d) $]-\infty;\ -9[$ ir $]9;\ +\infty[$; e) $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$; f) $]-\infty;\ -\sqrt{2}[$ ir $]\sqrt{2};\ +\infty[$; g) $[-\sqrt{5};\ \sqrt{5}]$; h) $\left]-\infty;\ -\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$ ir $\left[\frac{\sqrt{7}}{3};\ +\infty\right[$.

21. a) $\sqrt{5}$; b) 6; c) 7; d) $\sqrt{10}$; e) 1

22. a) $\{1;\ 5\}$; b) $[1;\ 5]$; c) $\{12;\ 14\}$; d) $]-\infty;\ 9]$ ir $[17;\ +\infty[$; e) $\{-9;1\}$; f) $]-\infty;\ -9]$ ir $[1;\ +\infty[$.
23. a) $]-3;\ 4]$; b) $]-\infty;\ -3[$ ir $]5;\ +\infty[$; c) $]-\infty;\ -7[$ ir $]1;\ +\infty[$; d) $[4;\ 8]$.
24. a) $|x-4|=5$; $\{1;\ 9\}$; b) $|x+3|<2$; $]-5;\ -1[$; c) $|x-1|\leqslant 0{,}5$; $[0{,}5;\ 1{,}5]$; d) $|x+4|\geqslant \frac{1}{5}$; $]-\infty;\ -4{,}2]$ ir $[-3{,}8;\ +\infty[$.

III SKYRIUS

§ 10. 1. a) $\frac{1}{2}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{27}{4}$; $\frac{64}{5}$; $\frac{125}{6}$; $\frac{216}{7}$; b) 1; $\frac{11}{5}$; $\frac{13}{5}$; $\frac{47}{17}$; $\frac{37}{13}$; $\frac{107}{37}$; c) $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{12}$; $-\frac{1}{31}$; $\frac{1}{68}$; $-\frac{1}{129}$; $\frac{1}{220}$; d) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{64}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{5}{1024}$; $\frac{3}{2048}$; e) $\frac{7}{2}$; $\frac{37}{4}$; $\frac{217}{8}$; $\frac{1297}{17}$; $\frac{7777}{32}$; $\frac{46\,657}{64}$; f) -1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$

2. a) Taip; b) taip; c) ne; d) ne.
3. a) $n=2$; b) $n=8$ ir $n=9$; c) ne.
4. a) 1; 2; 3; 4; 5; b) 7; 4, 1; -2; -5; c) -5; -10; -20; -40; -80; d) $\frac{1}{6}$; 6; $\frac{1}{6}$; 6; $\frac{1}{6}$; e) $\sqrt{2}$; $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$; f) 1; 1; 2; 3; 5.
5. a) 2; 1,8; 1,74; 1,733 ir 1; 1,7; 1,73; 1,732; b) 3; 2,3; 2,24; 2,237 ir 2; 2,2; 2,23; 2,236; c) 3; 2,7; 2,65; 2,646 ir 2; 2,6; 2,64; 2,645.
6. a) $(2n+1)\cdot 2^n$; b) $\frac{n}{2^n}$; c) $\frac{1}{n(n+1)}$; d) $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2$; e) $\frac{1}{n\sqrt{n}}$.
8. Monotoninės: a), b), e), g); nemonotoninės: c), d), h), i).
9. Aprėžtos: a), b), e), f), g), h), j); neaprėžtos: c), d), i), k).

§ 11. 2. $n>9$; $n>99$
3. $n>8$; $n>998$
4. $n>26$; $n>251$
5. Konverguoja a), c), f) sekos; diverguoja b), d), e) sekos.
6. a) $\frac{1}{2}$; b) 0; c) $-\frac{1}{2}$; d) $-\frac{3}{4}$; e) $-\frac{1}{27}$; f) $\frac{2}{3}$; g) 2; h) $\frac{1}{2}$; i) $\frac{4}{3}$.
7. a), b).
8. Ribas turi sekos a), b), c), d), e), f), i), j); ribų neturi sekos g), h).
9. a) $\frac{10}{3}$; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{3}{8}$; d) $-\frac{18}{5}$
10. a) $\frac{25}{24}$; b) $-\frac{343}{6}$; c) $\frac{8}{3}$; d) $-\frac{27}{8}$.
11. a) $\frac{909}{1100}$; b) $13\frac{919}{1100}$; c) $8\frac{151}{330}$; d) $-10\frac{67}{185}$; e) $-32\frac{14}{55}$; f) $3\frac{179}{1980}$

§ 12. 2. a) Neegzistuoja taške 0, egzistuoja kituose taškuose; b) neegzistuoja taške 0, egzistuoja kituose taškuose; c) neegzistuoja nė viename duotajame taške; d) neegzis-

tuoja taške 0, egzistuoja kituose taškuose; e) neegzistuoja nė viename duotajame taške; f) neegzistuoja taške 2, egzistuoja kituose taškuose.

3. a) 253; b) $-\frac{11}{13}$; c) 12; d) 4; e) 3; f) 0; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{3}$.

4. a) $-\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{7}$; c) 1; d) 0; e) 1.

§ 13. 1. a) Tolydi abiejuose taškuose; b) trūki taške $x=0$, tolydi kituose taškuose; c) trūki taške $x=0$, tolydi kituose taškuose; d) tolydi visuose duotuosiuose taškuose; e) trūki taške $x=-1$, tolydi kituose taškuose.

2. a) -3; b) 5; c) $-\frac{1}{5}$; d) 0; e) 4; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{3}$; h) 2; i) $\frac{3}{4}$; j) $\frac{1}{4}$; k) $\frac{1}{12}$; l) 3; m) $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$; n) 4; o) $-\sqrt{5}$; p) $\frac{1}{4}$.

§ 14. 1. a) $2^{1,7}>2^{0,8}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}<\left(\frac{1}{2}\right)^{0,8}$; c) $3^{0,7}<3^{\sqrt{\pi}}$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{0,6}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$.

2. 3 ir 8.

3. a) $\log_2 3$; b) -1; c) 0; d) $\varnothing$.

4. a) 2; b) 4; c) $\frac{8}{3}$; d) 0.

7. a) Apibrėžimo sritis: $]-\infty; +\infty[$, reikšmių aibė: $[1; +\infty[$; b) apibrėžimo sritis: $]-\infty; +\infty[$, reikšmių aibė: $]-\infty; 0[$; c) apibrėžimo sritis: $]-\infty; +\infty[$, reikšmių aibė: $[0; +\infty[$.

10. a) Apibrėžimo sritis: $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, reikšmių aibė: $]-\infty; +\infty[$; b) apibrėžimo sritis: $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, reikšmių aibė: $]-\infty; +\infty[$; c) apibrėžimo sritis: $]0; +\infty[$, reikšmių aibė: $[0; +\infty[$; d) apibrėžimo sritis: $]0; +\infty[$, reikšmių aibė: $[0; +\infty[$; e) apibrėžimo sritis: $]-\infty; 0[$, reikšmių aibė: $]-\infty; +\infty[$; f) apibrėžimo sritis: $]-\infty; 0[$, reikšmių aibė: $[0; +\infty[$.

11. a) 9; b) 1 ir $-\frac{2}{3}$; c) $1-\frac{4\lg 7}{10\lg 3-3\lg 7}$; d) -2; e) -1; f) $\frac{6\lg 2-3\lg 3}{4\lg 2-2\lg 3}$; g) -2; h) 2; i) $\log_2\frac{a\pm\sqrt{a^2-16}}{4}$, kai $a\geqslant 4$.

12. a) $\frac{65}{33}$; b) 5; c) 1 ir 2; d) 1 ir 2; e) 30 ir 100; f) 1 ir 10; g) $\sqrt{3}$ ir 9; h) 2 ir 4.

13. a) $x>3$; b) $x>-1$; c) $x>\log_6 13$; d) $(x<1)\vee(x>3)$; e) $(x<0)\vee(x>1)$; f) $x<\log_2 3$; g) $(x<-1)\vee(x>2)$; h) $x<\log_2\frac{3}{2}$.

14. a) $\left(x<\frac{1}{32}\right)\vee(x>32)$; b) $x>1$; c) $1<x<2$; d) $1<x<3$; e) $0<x<2$; f) $x>4$; g) $2<x<3$; h) $\left(\frac{1}{9}<x<\frac{1}{3}\right)\vee(x>1)$; i) $\left(0<x<\frac{1}{15}\right)\vee\left(x>\frac{1}{3}\right)$.

IV SKYRIUS

§ 15. 1. 720 km/h. **2.** 50 km/h.

3. a) v_0 m/s; b) v_0+at_0 m/s.

4. a) -2 m/s; b) 28 m/s; 10 m/s.

5. a) $\frac{1}{\sqrt{t}}$; b) $-\frac{1}{(3+t_0)^2}$; c) $3t_0^2+\frac{1}{2\sqrt{t_0}}$.

6. a) $2x_0$; 2; 10; b) $4x_0$; 4; 20; c) $2(x_0+3)$; 8; 16; d) $3x_0^2+2$; 5; 77;

e) $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2\sqrt{5}}$; f) $-3x_0^2$; -3; -75; g) $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}-2x_0$; $-\frac{3}{2}$;

$\frac{1}{2\sqrt{5}}-10$.

7. a) 1, kai $x>-1$, ir -1, kai $x<-1$; b) -1, kai $x<2$, ir 1, kai $x>2$; c) $2x-5$, kai $x\in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$, ir $-2x+5$, kai $x\in]2; 3[$; d) $2x+8$, kai $x\in]-\infty; -6[\cup]-2; +\infty[$, ir $-2x-8$, kai $x\in]-6; -2[$.

§ 16. 1. a) 1; b) $2x+1$; c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x$; d) $3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; e) $3x^2+2x+$ $+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; f) $4+3x^2$; g) $3+2x+3x^2$.

2. a) -8; b) $\frac{3}{5}$; c) $-\frac{4}{9}$; d) $3+\frac{1}{2\sqrt{x}}-6x$; e) $-5-9x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}$;

f) $2x-8$; g) $4x^3-\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$; h) $x^2-\frac{2}{7}\sqrt{x}$; i) $1+26x-3x^2+36x^3-$ $-15x^4$.

5. a) $\frac{17}{(5x_0-4)^2}$; $\frac{17}{81}$; b) $\frac{x_0-x_0^2-1}{2(1-2x_0)^2}$; $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{x_0^2-4x_0}{(x_0-2)^2}$; -3;

d) $\frac{\sqrt{x}(5x^2-3)}{2(3x-x^3)^2}$; $\frac{1}{4}$; e) $\frac{2x^4\sqrt{x}-30x^2\sqrt{x}+3x^2+5}{2\sqrt{x}(x^2-5)^2}$; $-\frac{5}{8}$;

f) $\frac{\sqrt{x}(15x^2+1)-(8x^2+30x^3+12x^4)}{2(x-3x^3)^2}$; $-\frac{17}{4}$.

§ 17. 1. $f\circ g=\lg^2 x+9\lg x+17$, $f\circ h=\left(\sqrt{x}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2+3\left(\sqrt{x}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)+$ $+1$, $g\circ h=\lg\left(\sqrt{x}+\frac{x-1}{x^2+1}\right)+3$, $g\circ f=\lg(x^2+3x-1)+3$, $h\circ f=$ $=\sqrt{x^2+3x-1}+\frac{x^2+3x-2}{(x^2+3x-1)^2+1}$, $h\circ g=\sqrt{\lg x+3}+\frac{\lg x+2}{\lg^2 x+6\lg x+10}$.

2. $y=f\circ g$, kai: a) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+3x+4$; b) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2+$ $+5x+1$; c) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$, $g(x)=\sqrt{x}$; d) $f(x)=\lg x$, $g(x)=3x^2+$ $+x+4$; e) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x)=3-\lg x$; f) $f(x)=\frac{1}{\lg x}$, $g(x)=$ $=x^2+x^3$; g) $f(x)=\frac{x^2+1}{3+x+\lg x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$; h) $f(x)=\frac{x}{4-x+\lg(1+x^2)}$, $g(x)=\sqrt{x}$

3. a) $9(x^2+5)(x^2+15x+23)^2$; b) $9x^2(x^3-3)^2$; c) $\frac{2(1+x)(1-2x-x^2)}{(x^2-x)^3}$;

d) $\frac{3(x^2+x+1)^2(1+6x-5x^2-2x^3-x^4)}{(x^3-3x^2-5x)^4}$.

§ 18. 1. a) $(x+2)e^x$; b) $(2x^3+3x^2+2x)e^{x^2+3x}$; c) $(2x-x^2-1)e^{-x}$;

d) $[(2x^2+3x)\ln 2+1]\cdot 2^{3x+x^2}$; e) $[3+10x+3x^2+(6x^2+10x^3+2x^4)\ln 4]\cdot 4x^2$;

f) $(2-3x)e^{-x}-(2x+3)\ln 14\cdot 14^{x^2+3x+5}$; g) $-2(x^2+3x)e^{-x^2}$; h) $[2x+$ $+3x^2+(x^2+x^3-1)(5-2x)\ln 2]\,2^{-x^2+5x+\frac{4}{5}}$; i) $[3x^2+2x+7+2x(x+$

$+18)(x^2+x+7)\ln 3]\,3^{x^2+36x+10}$.

2. a) $6x\ln x+\frac{3(x^2-1)}{x}$; b) $\frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{x-1}{x}-\ln x\right)$; c) $\frac{2x\ln x-x}{3\ln^2 x}$;

d) $a^{x^2}\left[2x\ln a\ln(x^2+4x+12)+\frac{2x+4}{x^2+4x+12}\right]$; e) $e^{x+1}\left[\ln(x+5)+\frac{1}{x+5}\right]$;

f) $3\log_5(x+1+x^2)+\frac{(3x+4)(2x+1)}{(x^2+x+1)\ln 5}$; g) $2x\ln\left(\frac{1}{1-x}+3x+5x^3\right)+$ $+\frac{x^2(4-6x+16x^2-30x^3+15x^4)}{(1-x)(1+3x-3x^2+5x^3-5x^4)}$.

3. a) $100x^{99}$; b) $-5x^4$; c) $\frac{7}{10\sqrt[10]{x^3}}$; d) $\frac{1}{5\sqrt[5]{(x+\sqrt{x})^4}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$;

e) $-\frac{1}{10x\sqrt{11x}}$; f) $\frac{6x^8+7x^6+x^3+2x+3}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

g) $-\frac{29}{42x\sqrt[42]{x^{29}}}-\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$; h) $\frac{1}{(3\sqrt{x}+7\sqrt[3]{x})^2}\left[\left(\frac{4}{9\sqrt[9]{(x+x^2)^8}}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{9}{11\sqrt[11]{x^{10}}}\right)(3\sqrt{x}-7\sqrt[3]{x})-(4\sqrt[9]{x+x^2}+9\sqrt[11]{x})\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{7}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\right]$

i) $\sqrt{5}\,x^{\sqrt{5}-1}$; j) $\pi x^{\pi-1}$; k) $5(2\sqrt[3]{x^2}+3x^3+x^7)^4\left(\frac{4}{3\sqrt[3]{x}}+9x^2+7x^6\right)$;

l) $3\left(\lg\sqrt{x}+x^{\frac{1}{3}}+12^{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1}{2x\ln 10}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$; m) $10\left(\ln\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^4}+\right.$ $\left.+\frac{1}{x^2}\right)^9\left(\frac{1}{2x}+\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}-\frac{2}{x^3}\right)$.

4. a) $5x^4-24x^3-27x^2$; b) $\frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}\left[(56x^7+2x\sqrt{2})(\sqrt{x}-1)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\right.$ $\left.\times(7x^8+\sqrt{2}\,x^2+\sqrt{5})\right]$; c) $\frac{1}{(x^2+3\sqrt{x}-1)^2}\left[\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1\right)(x^2-\right.$ $\left.-3\sqrt{x}-1)-\left(\sqrt[3]{x}-x-2^{\sqrt{3}}\right)\left(2x-\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\right]$; d) $(3-2x-10x^9)(\sqrt{x}+$ $+3x^7-8)+(3x-x^2-x^{10})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+21x^6\right)$; e) $\frac{1}{(\sqrt[3]{t}+t\sqrt[5]{t^4})^2}\left[\left(2t+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{2}{2\sqrt{t}}+9t^2\right)(\sqrt[3]{t}+t\sqrt[5]{t^4})-(t^2+\sqrt{t}+3t^3)\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}+\frac{9}{5}\sqrt[5]{t^4}\right)\right]$;

f) $11x^9+36x^{10}+\frac{9}{7\sqrt[7]{x^5}}$; g) $\left(2t^2+2t\sqrt{t}+1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)e^{t^2-1}$; h) $\left[\frac{1}{t}+\right.$ $\left.+\frac{2}{3\sqrt[3]{t}}+12t^2(\ln t+\sqrt[3]{t^2})\right]e^{4t^3}$; i) $\left[\frac{9(14x^6+3\sqrt{x})}{20\sqrt[10]{x^7+x\sqrt{x}+1}}+\right.$

$$+\frac{\sqrt[10]{(x^7+x\sqrt{x}+1)^9}}{2\sqrt{x}}\Bigg]e^{\sqrt{x}};\quad \text{j)}\quad \frac{1}{(2^{\sqrt{x}}+2^{3\sqrt{x}})^2}\left[\frac{2^{\sqrt{x}}+2^{3\sqrt{x}}}{x^3+\sqrt[7]{x^6}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(2x+\frac{6}{7\sqrt[7]{x}}\right)-\frac{\ln 2\,(2^{\sqrt{x}}+3\cdot 2^{3\sqrt{x}})}{2\sqrt{x}}\right];\quad \text{k)}\quad \frac{1}{\ln^2(t^3+\sqrt[8]{t^3}+2^t)}\times$$

$$\times\left[\left(3^{t^2}\cdot 2t\ln 3+8t^7+\frac{3}{7\sqrt[7]{t^4}}\right)\ln(t^3+\sqrt[8]{t^3}+2^t)-\right.$$

$$\left.-\frac{(3^{t^2}+t^8+\sqrt[7]{t^3})(24t^2\sqrt[8]{t^5}+3+8\sqrt[8]{t^5}\cdot 2^t\ln 2)}{8\sqrt[8]{t^5}\,(t^3+\sqrt[8]{t^3}+2^t)}\right].$$

5. a) $y'=10x^9+15x^4+3\sqrt{2}\,x^2$, $y''=90x^8+60x^3+6\sqrt{2}\,x$, $y'''=720x^7+180x^2+6\sqrt{2}$, $y^{IV}=5040x^6+360x$, $y^{V}=30\,240x^5+360$, $y^{VI}=151\,200x^4$, $y^{VII}=604\,800x^3$, $y^{VIII}=1\,814\,400x^2$, $y^{IX}=3\,628\,800x$, $y^{X}=3\,628\,800$, $y^{XI}=y^{XII}=\ldots=0$; b) $y'=4(x+3)^3$, $y''=12(x+3)^2$, $y'''=24(x+3)$, $y^{IV}=24$, $y^{V}=y^{VI}=\ldots=0$;

c) $y'=3(4x^2+3x+1)^2(8x+3)$, $y''=6(4x^2+3x+1)(80x^2+60x+13)$, $y'''=6(1280x^3+1440x^2+624x+99)$, $y^{IV}=288(80x^2+60x+13)$, $y^{V}=5760(8x+3)$, $y^{VI}=46080$, $y^{VII}=y^{VIII}=\ldots=0$; d) $y'=e^x+2x$, $y''=e^x+2$, $y'''=y^{IV}=\ldots=e^x$; e) $y'=5x^4+e^x$, $y''=20x^3+e^x$, $y'''=60x^2+e^x$, $y^{IV}=120x+e^x$, $y^{V}=120+e^x$, $y^{VI}=y^{VII}=\ldots=e^x$; f) $y'=e^x+\frac{1}{x}$, $y''=e^x-\frac{1}{x^2}$, $y'''=e^x+\frac{2}{x^3}$, $y^{IV}=e^x+\frac{3!}{x^4}$, ..., $y^{(n)}=e^x+\frac{(n-1)!}{x^n}$.

6. 70.

§ 19. **1.** $y=-4x-1$, $y=\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$; $y=1$, $x=0$; $y=4x-1$, $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$.

2. $y=3x+1$, $y=-\frac{1}{3}x+1$; $y=\frac{7}{3}$, $x=1$; $y=1$, $x=3$.

3. 45°, 0°; 45°. **4.** 1; 0.

5. (1; 0). **6.** 45°.

7. 2; −2; 4; −4. **8.** 45°; 0°; 135°.

§ 20. **1.** $v(1)=4$ (m/s), $a(1)=2$ (m/s²); $v(3)=8$ (m/s), $a(3)=2$ (m/s²).

2. 54 (m/s²).

5. 210,25 (J). **6.** 430 t.

§ 21. **1.** a) Didėja intervale $]-\infty;+\infty[$; b) mažėja intervale $]-\infty;+\infty[$; c) mažėja aibėje $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$; d) didėja aibėje $]-\infty;5[\cup]5;+\infty[$; e) mažėja intervale $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ ir didėja intervale $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$; f) didėja intervale $]-\infty;+\infty[$; g) mažėja intervale $]-\infty;-1[$ ir didėja intervale $]-1;+\infty[$; h) mažėja intervale $]-\infty;-1[$ ir intervale $]0;1[$, didėja intervale $]-1;0[$ ir intervale $]1;+\infty[$; i) didėja intervaluose $]-\infty;-1[$ ir $]1;+\infty[$, mažėja intervale $]-1;1[$; j) didėja intervale $\left]-\infty;\frac{3}{4}\right[$ ir mažėja intervale $\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$; k) mažėja intervaluose $]-\infty;-1[$ ir

]1; $+\infty$[, didėja intervale]-1; 1[; l) didėja intervaluose]$-\infty$; 1[ir $\left]1; \frac{3}{2}\right[$, mažėja intervale $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

§ **22. 1.** a) Maksimumas, kai $x=2$; b) minimumas, kai $x=3$; c) minimumas, kai $x=-\sqrt{2}$ ir $x=\sqrt{2}$; maksimumas, kai $x=0$; d) maksimumas, kai $x=\frac{1}{4}$; e) maksimumas, kai $x=-4$; minimumas, kai $x=4$; f) nėra ekstremumų; g) nėra ekstremumų; h) minimumas, kai $x=0$; i) minimumas, kai $x=0$; maksimumas, kai $x=2$; j) minimumas, kai $x=0$; k) minimumas, kai $x=\frac{1}{e}$; l) minimumas, kai $x=1$.

§ **23. 1.** a) Mažėja intervale]$-\infty$; -1[, didėja intervale]-1; $+\infty$[, $x=-1$ yra minimumo taškas, $f_{min}=f(-1)=-4$; b) mažėja intervale $\left]-\infty; \frac{3}{4}\right[$, didėja intervale $\left]\frac{3}{4}; +\infty\right[$, $x=\frac{3}{4}$ yra minimumo taškas, $f_{min}=f\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{37}{4}$; c) didėja intervale]$-\infty$; 2[, mažėja intervale]2; $+\infty$[, $x=2$ yra maksimumo taškas, $f_{max}=f(2)=7$; d) didėja intervale]$-\infty$; 2[, mažėja intervale]2; $+\infty$[, $x=2$ yra maksimumo taškas, $f_{max}=f(2)=0$; e) didėja intervale $\left]-\infty; \frac{1}{4}\right[$, mažėja intervale $\left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$, $x=\frac{1}{4}$ yra maksimumo taškas, $f_{max}=f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{4}$; f) didėja intervale]$-\infty$; 5[, mažėja intervale]5; $+\infty$[, $x=5$ yra maksimumo taškas, $f_{max}=f(5)=0$; g) mažėja intervale $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$, didėja intervale $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $x=-\frac{1}{2}$ yra minimumo taškas, $f_{min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$; h) mažėja intervale]$-\infty$; 1[, didėja intervale]1; $+\infty$[, $x=1$ yra minimumo taškas, $f_{min}=f(1)=2$.

§ **24. 1.** a) $\varnothing$; b) [-1; 3]; c)]$-\infty$; -1 [$\cup$] 5; $+\infty$[; d) R; e) R; f) {2}; g) [2; 6]; h) $\varnothing$.

§ **25. 1.** a) Iškilas aukštyn intervale]$-\infty$; 2[, iškilas žemyn intervale]2; $+\infty$[; b) iškilas žemyn intervale]$-\infty$; $+\infty$[; c) iškilas žemyn intervaluose]$-\infty$; -1[ir]1; $+\infty$[, iškilas aukštyn intervale]-1; 1[; d) iškilas žemyn intervale]$-\infty$; $+\infty$[.

§ **26. 1.** a) Apibrėžimo sritis:]$-\infty$; $+\infty$[; funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė; funkcija neperiodinė; grafikas kerta abscisių ašį taškuose (-1; 0), (1; 0), (3; 0) ir ordinačių ašį taške (0; 3); $f(x)>0$ intervaluose] -1; 1[ir]3; $+\infty$[, $f(x)<0$ intervaluose $-\infty$; -1[ir]1; 3[; asimptočių nera; didėja intervaluose $\left]-\infty; 1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$ ir $\left]1+\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$, mažėja intervale $\left]1-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$; turi maksimumą taške $x=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $f_{max}\approx 3{,}06$, ir minimumą taške $x=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $f_{min}\approx$ $\approx -3{,}06$; iškilas aukštyn intervale]$-\infty$; 1[ir žemyn intervale]1; $+\infty$[; $x=1$ yra vingio taškas; b) apibrėžimo sritis]$-\infty$; $+\infty$[; funkcija lyginė; funkcija neperiodinė; grafikas kerta abscisių ašį taškuose (-3; 0), (-1; 0), (1; 0), (3; 0) ir ordinačių ašį taške (0; 9); $f(x)>0$ intervaluose]$-\infty$; -3[,]-1; 1[ir]3; $+\infty$[, $f(x)<0$ intervaluose]-3; -1[ir]1; 3[; asimptočių nėra; didėja intervaluose]$-\sqrt{5}$; 0 [ir]$\sqrt{5}$; $+\infty$[, mažėja intervaluose]$-\infty$; $-\sqrt{5}$[ir]0; $\sqrt{5}$[; turi maksimumą taške $x=0$, $f_{max}=9$ ir minimumą taškuose $x=\pm\sqrt{5}$, $f_{min}=-16$; iškilas aukštyn intervale $\left]-\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{5}{3}}\right[$, iškilas žemyn intervaluose $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{5}{3}}\right[$ ir $\left]\sqrt{\frac{5}{3}}; +\infty\right[$, $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ yra vingio taškai; c) apibrėžimo sritis:]$-\infty$; $+\infty$[; funkcija lyginė; funk-

cija neperiodinė; grafikas kerta abscisių ašį taškuose $(-\sqrt{3};\ 0)$ ir $(\sqrt{3};\ 0)$ ir ordinačių ašį taške $(0;\ 3)$, $f(x)<0$ intervaluose $]-\infty;\ -\sqrt{3}[$ ir $]\sqrt{3};\ +\infty[$, $f(x)>0$ intervale $]-\sqrt{3};\ \sqrt{3}[$; asimptočių nėra; didėja intervaluose $]-\infty;\ -1[$ ir $]0;\ 1[$, mažėja intervaluose $]-1;\ 0[$ ir $]1;\ +\infty[$; turi maksimumus taškuose $x=\pm 1$, $f_{max}=4$ ir minimumą taške $x=0$, $f_{min}=3$; iškilas aukštyn intervaluose $\left]-\infty;\ -\sqrt{\frac{1}{3}}\right[$ ir $\left]\sqrt{\frac{1}{3}};\ +\infty\right[$ ir iškilas žemyn intervale $\left]-\sqrt{\frac{1}{3}};\ \sqrt{\frac{1}{3}}\right[$; $x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ yra vingio taškai; d) apibrėžimo sritis: $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};\ 2\right[\cup \left]2;\ +\infty\right[$; funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė; funkcija neperiodinė; grafikas kerta abscisių ašį taške $(1;\ 0)$ ir ordinačių ašį taške $\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$; $f(x)>0$ intervaluose $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[$ ir $]1;\ 2[$, $f(x)<0$ intervaluose $\left]-\frac{1}{2};\ 1\right[$ ir $]2;\ +\infty[$; vertikalios asimptotės: $x=-\frac{1}{2}$ ir $x=2$, tiesė $y=0$ yra asimptotė, kai $x\to\pm\infty$; didėja kiekviename savo apibrėžimo srities intervale; ekstremumų neturi; iškilas žemyn intervaluose $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[$ ir $]x_0;\ 2[$ ir aukštyn intervaluose $\left]-\frac{1}{2};\ x_0\right[$ ir $]2;\ +\infty[$, $x_0\approx 0{,}83$ yra vingio taškas; e) apibrėžimo sritis: $]-\infty;\ -1[\cup]-1;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$; funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė; funkcija neperiodinė; grafikas nekerta abscisių ašies, o ordinačių ašį kerta taške $\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$; $f(x)>0$ intervaluose $]-\infty;\ -1[$ ir $]2;\ +\infty[$, $f(x)<0$ intervale $]-1;\ 2[$; vertikalios asimptotės: $x+1=0$ ir $x=2$, tiesė $y=0$ yra asimptotė, kai $x\to\pm\infty$; didėja intervaluose $]-\infty;\ -1[$ ir $\left]-1;\ \frac{1}{2}\right[$, mažėja intervaluose $\left]\frac{1}{2};\ 2\right[$ ir $]2;\ +\infty[$, turi maksimumą taške $x=\frac{1}{2}$, $f_{max}=-\frac{4}{9}$; iškilas žemyn intervaluose $]-\infty;\ -1[$ ir $]2;\ +\infty[$ ir aukštyn intervale $]-1;\ 2[$; vingio taškų nėra; f) apibrėžimo sritis: $\left]-\infty;\ -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2};\ 1\right[$; funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė; funkcija neperiodinė; grafikas kerta abscisių ašį taškuose $(-1;\ 0)$ ir $(2;\ 0)$ ir ordinačių ašį taške $\left(0;\ \frac{2}{3}\right)$; $f(x)>0$ intervaluose $\left]-\infty;\ -\frac{3}{2}\right[$ ir $]-1;\ 2[$, $f(x)<0$ intervaluose $\left]-\frac{3}{2};\ -1\right[$ ir $]2;\ +\infty[$; vertikali asimptotė: $x=-\frac{3}{2}$; $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ yra asimptotė, kai $x\to\pm\infty$; didėja intervaluose $\left]-\frac{3+\sqrt{7}}{2};\ -\frac{3}{2}\right[$ ir $\left]-\frac{3}{2};\ \frac{-3+\sqrt{7}}{2}\right[$, mažėja intervaluose $\left]-\infty;\ -\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right[$ ir $\left]\frac{-3+\sqrt{7}}{2};\ +\infty\right[$; turi maksimumą taške $x=\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$, $f_{max}=\frac{3-\sqrt{7}}{2}$, ir minimumą taške $x=-\frac{3+\sqrt{7}}{2}$, $f_{min}=\frac{\sqrt{7}+4}{2}$; iškilas žemyn intervale $\left]-\infty;\ -\frac{3}{2}\right[$ ir aukštyn intervale $\left]-\frac{3}{2};\ +\infty\right[$; vingio taškų nėra; g) apibrėžimo sritis: $]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$; funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė; funkcija neperiodinė; grafikas kerta abscisių ašį taškuose $(1;\ 0)$, $(2;\ 0)$ ir nekerta ordinačių ašies; $f(x)>0$ intervaluose $]0;\ 1[$ ir $]2;+\infty[$, $f(x)<0$ intervaluose $]-\infty;\ 0[$ ir $]1;\ 2[$; vertikali asimptotė $x=0$, tiesė $y=x-3$ yra asimptotė, kai $x\to\pm\infty$; didėja intervaluose $]-\infty;-\sqrt{2}[$ ir $]\sqrt{2};\ +\infty[$, mažėja

intervaluose $]-\sqrt{2}; 0[$ ir $]0; \sqrt{2}[$; turi maksimumą taške $x=-\sqrt{2}$, $f_{max}=-(2\sqrt{2}+3)$ ir minimumą taške $x=\sqrt{2}$, $f_{min}=2\sqrt{2}-3$; iškilas žemyn intervale $]0; +\infty[$, ir aukštyn $]-\infty; 0[$, vingio taškų nėra; h) apibrėžimo sritis: $]-\infty; 2[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[$; funkcija nei lyginė, nei nelyginė; funkcija neperiodinė; grafikas nekerta abscisių ašies, o ordinačių ašį kerta taške $\left(0; \frac{1}{6}\right)$; $f(x)>0$ intervaluose $]-\infty; 2[$ ir $]3; +\infty[$, $f(x)<0$ intervale $]2; 3[$; vertikalios asimptotės: $x=2$ ir $x=3$; tiesė $y=0$ yra asimptotė, kai $x\to\pm\infty$; didėja intervaluose $]-\infty; 2[$ ir $\left]2; \frac{5}{2}\right[$, mažėja intervaluose $\left]\frac{5}{2}; 3\right[$ ir $]3; +\infty[$, turi maksimumą taške $x=\frac{5}{2}$, $f_{max}=-4$; iškilas žemyn intervaluose $]-\infty; 2[$ ir $]3; +\infty[$ ir aukštyn intervale $]2; 3[$; vingio taškų nėra; i) apibrėžimo sritis: $]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$; funkcija lyginė; funkcija neperiodinė; grafikas kerta abscisių ašį taškuose $(-3; 0)$ ir $(3; 0)$ ir ordinačių ašį kerta taške $\left(0; \frac{9}{4}\right)$; $f(x)>0$ intervaluose $]-\infty; -3[$, $]-2; 2[$ ir $]3; +\infty[$, $f(x)<0$ intervaluose $]-3; -2[$ ir $]2; 3[$; vertikalios asimptotės: $x=-2$ ir $x=2$; tiesė $y=1$ yra asimptotė, kai $x\to\pm\infty$; didėja intervaluose $]0; 2[$ ir $]2; +\infty[$, mažėja intervaluose $]-\infty; -2[$ ir $]-2; 0[$; turi minimumą taške $x=0$, $f_{min}=\frac{9}{4}$; iškilas žemyn intervale $]-2; 2[$ ir aukštyn intervaluose $]-\infty; -2[$ ir $]2; +\infty[$; vingio taškų nėra; j) apibrėžimo sritis: $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$; funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė; funkcija neperiodinė; grafikas nekerta nei abscisių ašies, nei ordinačių ašies; $f(x)>0$ visoje apibrėžimo srityje; $x=0$ yra vertikali asimptotė, $y=1$ yra asimptotė, kai $x\to\pm\infty$; mažėja kiekviename savo apibrėžimo srities intervale; ekstremumų nėra; iškilas aukštyn intervale $\left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right[$ ir žemyn intervaluose $\left]\frac{\ln 2}{2}; 0\right[$ ir $]0; +\infty[$; $x=\frac{\ln 2}{2}$ yra vingio taškas; k) apibrėžimo sritis: $]0; +\infty[$; funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė; funkcija neperiodinė; grafikas kerta abscisių ašį taške $(1; 0)$ ir nekerta ordinačių ašies; $f(x)<0$ intervale $]0; 1[$, $f(x)>0$ intervale $]1; +\infty[$; asimptočių nėra; mažėja intervale $\left]0; \frac{1}{e}\right[$, didėja intervale $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$; $x=\frac{1}{e}$ yra minimumo taškas, $f_{min}=-\frac{1}{e}$; iškilas žemyn visoje apibrėžimo srityje; vingio taškų nėra.

§ 27. **1.** a) $\max\limits_{[-0,5;\,0,5]} f=f(-0,5)=1,375$, $\min\limits_{[-0,5;\,0,5]} f=f(0,5)=-1,375$;
$\max\limits_{[-1,5;\,2]} f=f(-1)=2$, $\min\limits_{[-1,5;\,2]} f=f(1)=-2$;

b) $\max\limits_{[-1;\,1]} f=f(0)=-9$, $\min\limits_{[-1;\,1]} f=f(-1)=-16$; $\max\limits_{[0;\,3]} f=f(3)=0$,
$\min\limits_{[0;\,3]} f=f(2)=-25$; $\max\limits_{[-3;\,5]} f=f(5)=416$, $\min\limits_{[-3;\,5]} f=f(-2)=-25$;

c) $\max\limits_{[-0,5;\,0,7]} f=f(0,7)=3,7399$, $\min\limits_{[-0,5;\,0,7]} f=f(0)=3$; $\max\limits_{[-2;\,0]} f=f(-1)=$
$=4$, $\min\limits_{[-2;\,0]} f=f(-2)=-5$; $\max\limits_{[-2;\,2]} f=f(1)=f(-1)=4$,
$\min\limits_{[-2;\,2]} f=f(-2)=f(2)=-5$; $\max\limits_{[0;\,4]} f=f(1)=4$,
$\min\limits_{[0;\,4]} f=f(4)=-221$;

d) $\max\limits_{[-6;\,-1]} f=f(-6)=8\sqrt[3]{36}$, $\min\limits_{[-6;\,-1]} f=f(-1)=3$; $\max\limits_{[-2;\,1]} f=f(-2)=4\sqrt[3]{4}$,
$\min\limits_{[-2;\,1]} f=f(0)=0$.

2. 6 cm × 6 cm × 3 cm. **3.** $\frac{a}{4}+\frac{a}{2}$. **4.** 1 s; 7 m/s. 5. 1152 cm³.

6. a) $\frac{2p}{\pi+4}$; b) $\sqrt{\frac{2s}{4+\pi}}$. **7.** $R\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $-\frac{1}{2}$.

§ 30. **1.** $\cos\alpha=-0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$. **2.** $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$; $\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\alpha=-0{,}8$.

3. a) Taip; b) taip; c) taip; d) taip.

4. Gali. **5.** $\pm0{,}6572$. **6.** $\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{b}$. **7.** $-\frac{25}{12}$. **8.** 0,4226.

9. 9,1736. **10.** 0,7265. **11.** 1,3347.

§ 31. **1.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

2. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$. **3.** 1. **4.** 1. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** -1. **7.** $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

9. $-\frac{36}{85}$. **10.** $-\frac{56}{65}$. **11.** $\sqrt{3}\sin\alpha$. **13.** $-(2+\sqrt{3})$.

14. a) $\sqrt{3}$; b) $-\operatorname{tg}22°\approx-0.4040$ **15.** Neegzistuoja.

16. 1. **17.** $\frac{1}{7}$. **18.** $\cos2\alpha=-\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{24}{7}$. **19.** $\frac{16\sqrt{105}}{169}$.

20. $2\sin\alpha>\sin2\alpha$ **21.** a) $\sqrt{3}$; b) $2\cos2\alpha$. **23.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

24. a) $\frac{24}{25}$; b) $-\frac{7}{25}$; c) $\frac{24}{7}$; d) $-\frac{3}{4}$.

25. a) $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$; c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$; d) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; e) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$; f) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

26. a) $\frac{1}{2}(\cos10°-\cos30°)$; b) $\frac{1}{2}(\sin75°+\sin15°)$; c) $\frac{1}{2}(\sin60°-\sin10°)$; d) $\frac{1}{2}(\cos75°+\cos35°)$; e) $\frac{1}{2}(\cos2\alpha-\cos2x)$; f) $\frac{1}{2}(\sin2\alpha+\sin2x)$; g) $\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2x)$.

28. a) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; b) 0; c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; f) 0.

29. a) $\sqrt{3}\cos\alpha$; b) $\sin\alpha$.

30. a) $4\sin\left(15°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15°-\frac{\alpha}{2}\right)$; b) $4\sin\left(15°-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15°+\frac{\alpha}{2}\right)$
c) $2\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)$; d) $4\sin\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)$.

31. a) 0; b) $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

32. a) $\cos\alpha$; b) $-\sqrt{3}\sin\alpha$.

34. a) $2\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)$; b) $-2\sin\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)$;
c) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; d) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **36.** 0.

§ 33. **1.** a) $2\cos2x$; b) $a\cos ax$; c) $-3\sin3x$; d) $-a\sin ax$; e) $2\cos2x+3\sin3x$; f) $1+2\sin2x$; g) $6x^2+15\sin10x$; h) $\cos3x$; i) $-\cos2x$; j) $-\frac{3\sin3x}{2}$.

2. a) $\cos x - x\sin x$; b) $\sin x + x\cos x$; c) $\cos 2x$; d) $2\cos 2x\cos 3x - 3\sin 2x\sin 3x$; e) $a\cos ax\cos bx - b\sin ax\sin bx$; f) $\sin 2x$; g) $-3\cos^2 x\sin x$; h) $-a\sin 2ax$; i) $na\sin^{n-1} ax\cos ax$; j) $-na\times\cos^{n-1} ax\sin ax$.

4. a) $4+2\,\mathrm{tg}^2 2x+2\,\mathrm{ctg}^2 2x$; b) $\mathrm{ctg}\,x - x(1+\mathrm{ctg}^2 x)$; c) $3\,\mathrm{tg}^2 x(1+\mathrm{tg}^2 x) + 3(1+\mathrm{tg}^2 3x)$; d) $-2(1+\mathrm{ctg}^2 2x) - 4\,\mathrm{tg}\,2x(1+\mathrm{tg}^2 2x)$; e) $2\cos 2x$; f) $2\sin 2x$; g) $2a(1+\mathrm{tg}^2 ax)$; h) $(4x-1)\cos(2x^2-x)$; i) $-\sin 2x$; j) $\cos x - 2\sin 2x + 3(1+\mathrm{tg}^2 3x)$. 5. a) -1; b) 1.

7. a) $-\sin\frac{x}{3}$; b) $\frac{3}{2}\cos 3x$; c) $\cos ax$; d) $2x\cos(x-1) - x^2\sin(x-1)$; e) $2\cos(3+2x) - 2\sin(3+2x)$; f) $24\sin^2 4x\cos 4x$; g) $1+\mathrm{tg}^2 3x$; h) $6(\mathrm{tg}^2 3x - \mathrm{tg}^2 2x)$; i) $24\,\mathrm{tg}^2 4x(1+\mathrm{tg}^2 4x)$; j) $-24\,\mathrm{ctg}^2 2x(1+\mathrm{ctg}^2 2x)$.

8. $\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

9. a) $-\sin x$; b) $-4\sin 2x$; c) $-a^2\sin ax$; d) $-\cos x$; e) $-9\cos 3x$ f) $-a^2\cos ax$; g) $2+2\cos 2x$; h) $6x+2\cos 2x$; i) $-16\cos 4x$; j) $-2\sin 2x$.

§ 34. 1. a) 0,2443; b) 0,4189; c) 0,5934; d) 0,8552; e) 1,1257; f) 0,9338.
2. a) 0,0873; b) 0,2618; c) 0,3508; d) 0,5253; e) 0,6196; f) 0,7938.
3. a) 0,1833; b) 0,3316; c) 0,3578; d) 1,1170; e) 1,3788; f) 1,4399
4. a) 0,1367; b) 0,1484; c) 0,2240; d) 0,2182; e) 1,0472; f) 1,3177.

5. a) $\frac{7}{\sqrt{1-49x^2}}$; b) $\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$; c) $\frac{mn}{\sqrt{1-n^2x^2}}$.

6. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. 7. $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$.

8. $\frac{6x^2}{1+x^6}$. 10. $2x\arcsin x + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. a) $-\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$; b) $-\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$; c) $-\frac{mn}{\sqrt{1-n^2x^2}}$.

12. $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. 14. $2x\arccos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. 15. 0.

17. a) $\frac{3}{1+9x^2}$; b) $\frac{m}{1+m^2x^2}$; c) $\frac{mn}{1+n^2x^2}$.

19. $-\frac{1}{1+x^2}$. 20. $2x\,\mathrm{arctg}\,x^2 + \frac{2x^3}{1+x^4}$.

21. $\frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$. 22. $\frac{a^2}{(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$.

23. a) $-\frac{2}{1+4x^2}$; b) $-\frac{n}{1+n^2x^2}$; c) $-\frac{mn}{1+n^2x^2}$.

24. $\frac{1}{1+x^2}$. 25. $\frac{4\,\mathrm{arctg}\,2x}{1+4x^2}$. 26. $2x\,\mathrm{arcctg}\,x - \frac{x^2}{1+x^2}$.

28. $\frac{2(x^2-1)}{x^4+6x^2+1}$. 29. 0.

§ 36. 1. $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$. 2. $\pi k \pm \frac{\pi}{6}$. 3. $\pi k \pm \frac{\pi}{3}$. 4. $\frac{\pi}{4}+\pi k$.

5. $\pi k \pm \frac{\pi}{6}$. 6. $\pi k + \frac{\pi}{3}$. 7. $\pi k \pm \frac{1}{2}\arccos(-0,75)$.

8. $\pi k \pm \frac{\pi}{6}$. **9.** $\pi k \pm \frac{\pi}{3}$. **10.** $\frac{\pi k}{2}$ ir $2\pi k \pm \frac{\pi}{2}$. **11.** $\frac{\pi k}{2}$ ir $\frac{2\pi k}{3} \pm \frac{\pi}{6}$.

12. $\frac{4\pi k}{5} \pm \frac{\pi}{5}$ ir $\frac{4\pi k}{3} \pm \frac{\pi}{3}$. **13.** $\frac{2\pi k}{3}$. **14.** $\frac{\pi k}{2} \pm \frac{\pi}{4}$ ir $\frac{\pi k}{4} \pm \frac{\pi}{8}$.

15. $\frac{\pi k}{4}$. **16.** $\pi k - \frac{\pi}{4}$ ir $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}$. **17.** $2\pi k$ ir $2k\pi + \frac{\pi}{2}$. **18.** πk. **19.** $\frac{\pi k}{2}$.

20. $\operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{2}) + \pi k$.

21. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$. **22.** $\pi k \pm \frac{\pi}{6}$. **23.** πk. **24.** πk ir $\pi k \pm \frac{\pi}{6}$. **25.** $2\pi k$.

26. $2\pi k$ ir $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **27.** $\pi k \pm \frac{\pi}{3}$. **28.** $(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$.

29. $\pi k \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{7}}$. **30.** $\frac{\pi k}{3}$.

Al-103 **Algebra** ir analizės pradmenys: Vadovėlis spec. vid. m-kloms / Red. G. Jakovlevas.— V.: Mokslas, 1979 — .— (Matematika technikumams).
D. 1 / M. Kačenovskis, J. Koliaginas, G. Lukankinas, G. Jakovlevas. 272 p., brėž.

1702000000

A $\frac{20203-077}{M854(08)-79}$ 131—79 **512(075)**

Мечислав Игнатьевич Каченовский, Юрий Михайлович Колягин, Геннадий Лаврович Луканкин, Геннадий Николаевич Яковлев. АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА. ЧАСТЬ I. На литовском языке. Перевел с русского издания 1977 г. Эдвардас Владович Мисявичюс. Вильнюс, Мокслас, 1979.

Mečislovas Kačenovskis, Jurijus Koliaginas, Genadijus Lukankinas, Genadijus Jakovlevas. ALGEBRA IR ANALIZĖS PRADMENYS. 1 DALIS. Vertė Edvardas Misevičius. Redaktorė E. Petrėnaitė. Viršelio dailininkė L. Tulytė. Meninis redaktorius A. Žvilius. Techninė redaktorė A. Plauškienė. Korektorės: A. Sidarkevičienė, A. Vaitkevičienė.

IB Nr. 1261

Duota rinkti 1978.12.12. Pasirašyta spaudai 1979.08.30. Formatas 60×90¹/₁₆. Popierius — spaudos Nr. 1. Šriftas — 10 p. romaniškas. Spauda — iškilioji. 17 sp. l., 18,73 apsk. l. l. Tiražas 25 000 egz. Užsak. Nr. 1545. Kaina 0,75 rb. „Mokslas", Vilnius, Žvaigždžių g. 23. Spausdino K. Poželos spaustuvė, Kaunas, Gedimino g. 10.